Die Mathematikprüfung im dänischen „Studentereksamen"

Jens Mittag

Das dänische Gymnasium führt die Ausbildung nach Abschluss der 9. oder 10. Klasse an der „Folkeskole" weiter. Mit Abschluss der neunten Klasse haben die Schülerinnen und Schüler die Wahl,

- die Schule zu verlassen,
- ein freiwilliges zehntes Schuljahr an der Folkeskole zu absolvieren
- oder mit einer Ausbildung an einem Gymnasium fortzufahren.

Bei der Wahl des Gymnasiums kann man Schwerpunkte setzen. So gibt es in Dänemark Handelsgymnasien, das technische oder allgemeinbildende Gymnasium.

Die reguläre Zeit für einen Schüler oder eine Schülerin am dänischen Gymnasium beträgt drei Jahre und sie endet mit dem „Studentereksamen". Die Prüfungen für dieses Examen finden nicht wie in Deutschland üblich am Ende des letzten Schuljahres statt, sondern erstrecken sich über alle drei Jahre. In der Regel endet die Unterrichtszeit in Dänemark Mitte Mai; daran schließt sich eine Prüfungsperiode bis Ende Juni an. In dieser Periode werden alle Schülerinnen und Schüler, nicht nur die des Abschlussjahrganges, geprüft. Die Prüfungsergebnisse gehen dann in die Endnote für das Studentereksamen mit ein. Zum Bestehen des Studentereksamens muss jeder Schüler und jede Schülerin am Ende der drei Jahre insgesamt im mündlichen und schriftlichen Bereich 10 Prüfungen abgelegt haben.

Man kann Fächer in Dänemark auf drei Niveaus wählen:

- auf A-Niveau, auch hohes Niveau genannt,
- auf B- oder mittlerem Niveau
- oder auf Grundniveau C.

Das C-Niveau erreicht man zumeist [1]) nach nur einem Jahr Unterricht in diesem Fach. Nimmt man ein weiteres Jahr am Ergänzungsunterricht teil, erlangt man das B-Niveau und zum A-Niveau schließlich gelangt man, wenn man auch im dritten Jahr am Gymnasium am Fachunterricht teilnimmt.

Eine mündliche Prüfung steht für einen Schüler oder eine Schülerin immer dann an, wenn ein Fach abgegeben wird. In welchem Fach eine Schülerin oder ein Schüler geprüft wird entscheidet das Unterrichtsministerium in Kopenhagen. Von dort bekommen die Schulen zu Beginn der Prüfungsperiode eine Mitteilung, in welchen abschließenden Kursen mündliche Prüfungen durchzuführen sind. Eine mündliche Prüfung wird von zwei Fachlehrern abgenommen: dem unterrichtenden Fachlehrer und einem sogenannten „Zensor". Dies ist ein Fachkollege von einer beliebigen anderen Schule in Dänemark. Die Zensoren werden dabei den einzelnen Schulen vom Unterrichtsministerium zugewiesen. Der Gedanke hinter dieser Prüfungsstruktur ist, an allen Schulen in Dänemark ein vergleichbares Niveau zu erreichen. Als Lehrer in Dänemark ist man jedes Jahr auch Zensor und erlebt so immer wieder die Leistungen von Schülerinnen und Schülern an anderen Schulen.

Die Aufgaben für die schriftlichen Prüfungen werden zentral vom Unterrichtsministerium für alle Schülerinnen und Schüler in Dänemark gestellt. Für jedes Fach gibt es eine Aufgabenkommission, die diese Aufgaben ausarbeitet. Je nach Fach haben die Schülerinnen und Schüler dann vier bis fünf Zeitstunden, um die Aufgaben in der Prüfung zu bearbeiten. Unmittelbar nach einer schriftlichen Prüfung werden die Schülerarbeiten von der Schule eingesammelt und unkorrigiert nach Kopenhagen zurückgeschickt. Die Arbeiten aller dänischen Schülerinnen und Schüler werden dann von wenigen Fachkollegen korrigiert, die „schriftliche Zensoren" genannt werden. Eine Arbeit wird dabei immer von zwei Zensoren durchgesehen, die sich anschließend auf eine Note einigen. Der unterrichtende Fachlehrer bekommt die Arbeiten mit den Benotungen zurückgeschickt und teilt den Schülerinnen und Schülern die Ergebnisse mit.

Eine schriftliche Prüfung gibt es für das Fach Mathematik auf A-, B- und C-Niveau. Im Folgenden sind zunächst die Prüfungsaufgaben aus dem Studentereksamen 2002 für das C-Niveau zu finden. Dies sind Aufgaben, die die Schülerinnen und Schüler nach einem Jahr Mathematikunterricht an einem dänischen Gymnasium lösen sollen. Als Hilfsmittel sind Taschenrechner, eine Formelsammlung, Millimeter-, einfachlogarithmisches und Normalverteilungspapier erlaubt. Zum Vergleich dazu folgen die Aufgaben für das A-Niveau. Dies ist das höchste Niveau, das man an einem dänischen Gymnasium erreichen kann. Hier besteht die Prüfung aus zwei Teilen, die an unterschiedlichen Tagen durchgeführt werden:

In dem einen Teil (vier Zeitstunden) gibt es keine Einschränkungen für die zugelassenen Hilfsmittel. Hier sind die Aufzeichnungen der Schüler, grafische Taschenrechner, Mathebücher, Musterlösungen usw. erlaubt, während der andere Teil (zwei Zeitstunden) völlig ohne Hilfsmittel, also auch ohne Taschenrechner, gelöst werden muss. Inhalt des Examens sind alle Themen, die in den drei Jahren am Gymnasium behandelt worden sind.

Wer interessante Aufgaben für seinen eigenen Unterricht sucht, findet die Prüfungsaufgaben des dänischen Studentereksamens der letzten Jahre im Internet unter http://us.uvm.dk/gymnasie/almen/eksamen/opgaver/?menuid=150560. Dort liegen sie zum kostenlosen Download als pdf-File bereit. Von der Homepage des dänischen Unterrichtsministeriums (www.uvm.dk) gelangt man über den Link *Gymnasiale uddannelser→Almengymnasiale uddannelser→Love og bekendtgørelser→Bekendtgørelse om gymnasiet…* auch zu den Lehrplänen aller Fächer und damit unter anderem zum Fach Mathematik.

1 Prüfung für das C-Niveau:

Aufgabe 1 (15 Pkte.):

a) Auf ein Sparkonto mit 4,5% Zinsen p.a. wird jedes Jahr ein fester Betrag eingezahlt. Unmittelbar nach der 12. Einzahlung befinden sich 111 341 Kronen auf dem Konto.

---

[1]) Eine Ausnahme ist z.B. Französisch, wenn man mit dieser Sprache am Gymnasium beginnt. Dann sind zwei Jahre Unterricht zum Erreichen des C-Niveaus notwendig.

Berechne den jährlichen Sparbetrag.

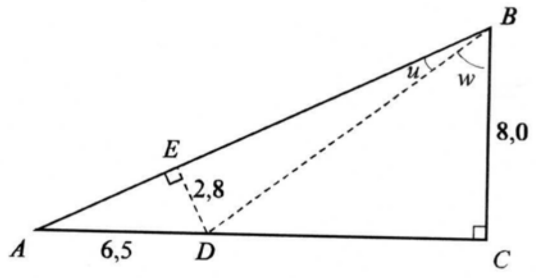
b) Eine stochastische Variable X sei binomialverteilt mit dem Anzahlparameter $n = 40$ und dem Wahrscheinlichkeitsparameter $p = 0,2$.

Bestimme $P(X \leq 9)$.

c) In vier aufeinander folgenden Jahren steigt der Wert einer Aktie jeweils um 25%, 11%, 42% bzw. 2%.

Berechne die durchschnittliche prozentuale Wertsteigerung in dieser Vierjahresperiode.

Aufgabe 2 (15 Pkte.):



Die Abbildung zeigt ein Dreieck ABC mit einem rechten Winkel bei C. Der Punkt D liege auf der Seite AC und der Punkt E auf der Seite AB, so dass der Winkel bei E ein rechter ist. Einige der Längen sind in der Abbildung aufgeführt.

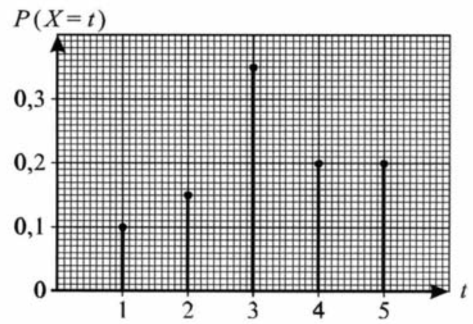
Berechne den Winkel bei A.

Berechne $|AC|$.

Berechne die Winkel w und u.

Aufgabe 3 (10 Pkte.):

Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine stochastische Variable X.



Fülle die folgende Tabelle aus.

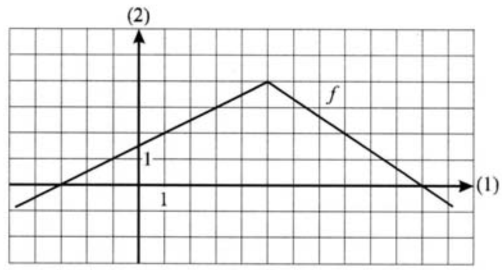
t	1	2	3	4	5
P(X = t)					

Bestimme den Erwartungswert für X.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 3)$.

Aufgabe 4 (15 Pkte.):

In der Abbildung ist eine stückweise lineare Funktion f dargestellt.



Löse grafisch die Gleichung $f(x) = 0$.

Löse grafisch die Ungleichung $f(x) > 2$.

Bestimme eine Funktionsvorschrift für f.

Aufgabe 5 (20 Pkte.): Die Tabelle unten gibt den Luftdruck in der Stratosphäre in verschiedenen Höhen über dem Erdboden an.

Höhe (km)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Luftdruck (mbar)	226	193	165	141	120	103	88	75	64	55

Zeichne die Wertepaare in ein geeignetes Koordinatensystem ein und zeige hiermit, dass der Luftdruck näherungsweise durch eine Funktion der Form

$$f(x) = b \cdot a^x$$

beschrieben werden kann, wobei $f(x)$ der Luftdruck gemessen in mbar und x die Höhe über der Erdoberfläche gemessen in km sei.

Bestimme die Zahlen a und b.

Aus einem Flugzeug wird der Druck in der Stratosphäre zu 150 mbar bestimmt.

Berechne die Höhe des Flugzeugs über dem Erdboden.

Um wie viel Prozent fällt der Luftdruck, wenn das Flugzeug 0,5 km steigt?

Zwei Flugzeuge befinden sich in der Stratosphäre. Der Luftdruck auf das eine Flugzeug ist doppelt so hoch wie der Luftdruck auf das andere.

Bestimme den Höhenunterschied der Flugzeuge.

Aufgabe 6 (10 Pkte.): Die Tabelle unten gibt den Anteil der muslimischen Bevölkerung in verschiedenen Gebiete der Erde an.

	Europa	Afrika	Amerika	Asien und Ozeanien
Muslime	4,2%	40,5%	0,8%	22,0%

Die Weltbevölkerung verteilt sich auf die genannten Regionen wie folgt:

	Europa	Afrika	Amerika	Asien und Ozeanien
Prozentteil an der Weltbevölkerung	12,5%	12,9%	13,6%	22,0%

Wie viele Prozent der Weltbevölkerung sind Muslime?

Welcher Prozentsatz der Muslime dieser Erde lebt in Europa?

Aufgabe 7a (15 Pkte.): In einer amerikanischen Studie hat man den Quecksilbergehalt in einer großen Anzahl von Schwertfischen gemessen. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Verteilung der Schwertfische nach ihrem Quecksilbergehalt.

Quecksilber-gehalt (ppm)	-0,6	0,6-0,8	0,8-1,0	1,0-1,2	1,2-1,4	1,4-1,6	1,6-1,8	1,8-
Prozentteil der Schwert-fische (in %)	14,8	7,8	19,1	14,8	19,1	9,6	7,8	7,0%

Zeige, dass der Quecksilbergehalt näherungsweise normalverteilt ist.

Wie viele Prozent der Schwertfische haben einen Quecksilbergehalt zwischen 0,95ppm und 1,25ppm?

Wie groß ist der Quecksilbergehalt von den 20% der Schwertfische, die den größten Quecksilbergehalt haben?

Aufgabe 7b (15 Pkte.):

Die Abbildung stammt aus einem Prospekt von „Tele Danmark – Butikken, aug/sep 2001" und zeigt die Werbung für ein Laptop.

Zeige, dass der Zinssatz für das genannte Angebot bei ca. 1,74% pro Monat liegt.

Berechne den zugehörigen jährlichen Zinssatz.

Berechne die monatliche Rate, wenn man sich die 12 999 Kronen von einer Bank zu einem monatlichen Zinssatz von 1,13% leiht und in 36 Monaten abbezahlt.

Von den Aufgaben 7a und 7b ist nur eine zur Bewertung abzugeben.

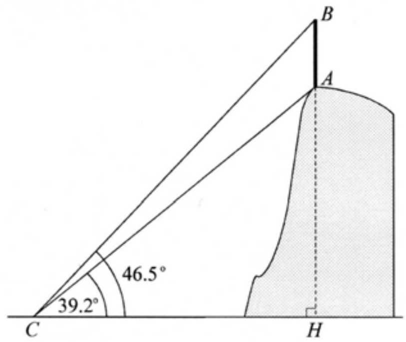
2 Prüfungen für das A-Niveau

Teilprüfung mit Hilfsmitteln:

Aufgabe 1 (ca. 15 Pkte): Berechne mit Hilfe der Stammfunktionen folgende Integrale

$$\int_0^1 \ln(2x+1)\,dx, \quad \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\,dx \quad und \quad \int_0^1 (x+e^x)^2\,dx.$$

Aufgabe 2 (ca. 10 Pkte):



Die Abbildung zeigt eine Steilküste, deren Höhe |AH| bestimmt werden soll. Am höchsten Punkt A der Steilküste steht ein 20m hoher Mast AB. Die Sichtlinie von C nach A schließt mit CH einen Winkel von 39,2° ein, und die Sichtlinie von C nach B mit CH einen solchen von 46,5°.

Berechne die Höhe der Steilküste.

Aufgabe 3 (ca. 15 Pkte): Mit *O(x)*, angegeben in Mio. Kronen, seien die gesamten Kosten zur Produktion von x Tonnen einer Ware bezeichnet. Die Funktion *O(x)* sei gegeben durch

$$O(x) = 17x + 100\cos(0{,}16x) + 150, \quad x \in [0{,}30]$$

Bestimme *O'(x)* und zeige, dass *O(x)* eine monoton wachsende Funktion ist.

Es gibt genau einen Wert für x, bei dem die Unkosten pro Einheit $\frac{O(x)}{x}$ gleich sind mit den Grenzkosten *O'(x)*.

Bestimme diesen Wert für x mit Hilfe des grafischen Taschenrechners.

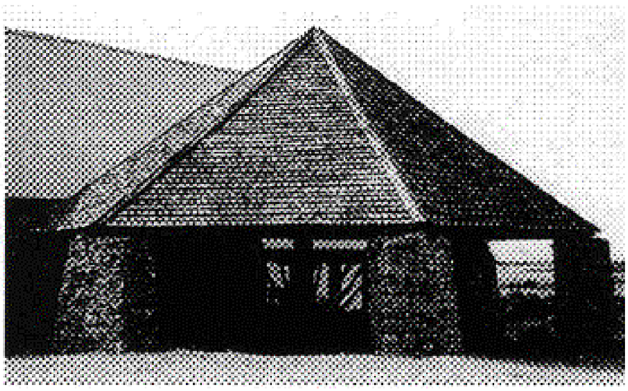
Jede Tonne der produzierten Ware kann für 30,8 Mio. Kronen verkauft werden. Mit *F(x)* sei der Gewinn, angegeben in Mio. Kronen, bezeichnet, der beim Verkauf von x Tonnen erzielt wird.

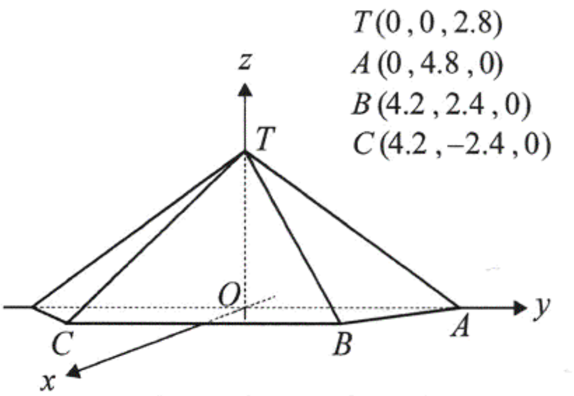
Zeige, dass gilt

$$F(x) = 13{,}8x - 100\cos(0{,}16x) - 150, \quad x \in [0{,}30],$$

und bestimme x so, dass *F(x)* maximal wird.

Aufgabe 4 (ca. 15 Pkte): Das Foto zeigt ein Landwirtschaftsgebäude auf Gotland. Die Dachkonstruktion hat die Form einer Pyramide mit sechs Seitenflächen. Auf der Zeichnung ist ein Teil dieser Dachkonstruktion in einem Koordinatensystem mit Ursprung O skizziert.





Størrelsesforholdene er ikke korrekte

Bestimme einen Normalenvektor für die Ebene α, die die Seitenfläche TAB enthält.

Berechne den Flächeninhalt der Seitenfläche TAB.

Die Ebene β, die die Seitenfläche TBC enthält, wird durch die Gleichung

$$10x + 15z - 42 = 0$$

beschrieben.

Berechne den Abstand vom Ursprung O des Koordinatensystems zu dieser Ebene β.

Berechne den Winkel zwischen den Seitenflächen TBC und TAB.

Aufgabe 5 (ca. 15 Pkte): Eine Funktion f löse die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot y}, \quad x > 0,$$

und der Graf von f gehe durch den Punkt $P(1,-2)$.

Bestimme eine Gleichung für die Tangente an f im Punkte P.

Bestimme eine Funktionsgleichung und die Definitionsmenge für f.

Aufgabe 6 (ca. 15 Pkte): Eine Brauerei besitzt eine Maschine, die ein Erfrischungsgetränk in Flaschen füllt. Die Maschine ist so eingestellt, dass die Menge an Getränk, mit denen die Flaschen abgefüllt werden, normalverteilt ist mit einem Mittelwert von 505 ml und einer Streuung von 3 ml.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche mindestens 500 ml Erfrischungsgetränk enthält.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche weniger als 504 ml Getränk enthält, wenn bekannt ist, dass sie mindestens 500 ml enthält.

Der Tagesproduktion wird eine Stichprobe mit 30 zufällig gewählten Flaschen entnommen.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass alle 30 Flaschen mindestens 500 ml Erfrischungsgetränk enthalten.

Aufgabe 7a (ca. 15 Pkte): Ein Punkt $P(x,y)$ bewege sich in der Ebene, so dass für seine x- und y-Koordinate zum Zeitpunkt t gelte

$$x(t) = 3t^4 \quad , \ t \in R$$
$$y(t) = 21(t^3 - t^5)$$

Berechne die Koordinaten aller Punkte, an denen die Bahn des Punktes die x-Achse schneidet.

Berechne die Zeitpunkte t, $t \neq 0$, zu denen der Geschwindigkeitsvektor parallel zur x-Achse ist.

Die Bahnkurve schließt eine Punktemenge M ein mit einem Flächeninhalt.

Berechne mit Hilfe von Stammfunktionen diesen Flächeninhalt M.

Aufgabe 7b (ca. 15 Pkte): In einem Koordinatensystem seien ein Kreis C und eine Familie von Parabeln P_k gegeben durch

$$C: \quad x^2 - 2x + y^2 - 6y + 6 = 0$$
$$P_k: \ y = x^2 - 2x + k.$$

Bestimme Radius und Mittelpunkt des Kreises C.

Berechne die Werte für k, für die der Scheitelpunkt der Parabel auf dem Kreis C liegt.

Der Punkt $A(\frac{2+\sqrt{15}}{2}, \frac{5}{2})$ liegt auf dem Kreis C.

Bestimme den Wert für k, bei dem der Punkt A auch auf der Parabel P_k liegt.

Zeige, dass die Parabel und der Kreis für diesen gefundenen Wert von k eine gemeinsame Tangente im Punkt A haben.

Von den Aufgaben 7a und 7b ist nur eine für die Bewertung abzugeben.

Teilprüfung ohne Hilfsmittel:

Aufgabe 1 (4 Pkte.): Fasse zusammen und kürze.

$$\frac{(a^{-1})^2(b^2-1)}{(b+1)a}$$

Aufgabe 2 (4 Pkte.): Löse die Ungleichung

$(x+3)(x+1)(x-5)>0.$

Aufgabe 3 (4 Pkte.): Für eine exponentiell wachsende Funktion f gelte

$f(3)=4$ und $f(6)=32$.

Bestimme eine Funktionsgleichung für *f*.

Aufgabe 4 (7 Pkte.): Eine Funktion ist gegeben durch

$$f(x)=\mathrm{e}^x-5x+2.$$

Bestimme das Monotonieverhalten von *f*.

Aufgabe 5 (6 Pkte.): In einem Koordinatensystem in der Ebene sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben mit

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}=\begin{pmatrix}t\\3\end{pmatrix}, t\in R.$$

Berechne *t*, so dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.

Berechne *t* so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel zueinander sind.

Aufgabe 6 (6 Pkte.): Eine Funktion *f* sei bestimmt durch

$$f(x)=\frac{x^2+6x-3}{x+2}.$$

Begründe, dass *f* genau zwei Asymptoten hat und gib jeweils eine Gleichung für diese Asymptoten an.

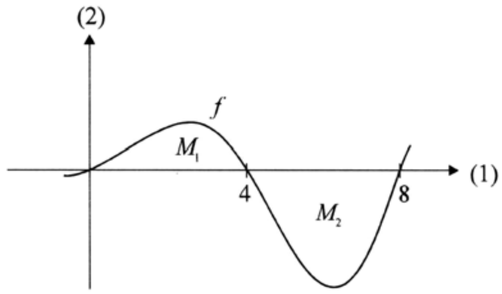
Aufgabe 7 (5 Pkte.): In einem Koordinatensystem im Raum sei eine Kugel mit dem Mittelpunkt *P*(1; -2; 3) und Radius 5 gegeben.

Bestimme eine Gleichung für die Kugel.

Bestimme eine Gleichung für die Ebene, die im Punkt Q(4; 2; 3) tangential an die Kugel ist.

Aufgabe 8 (4 Pkte.):

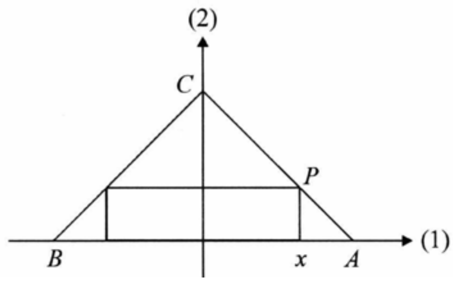
Die Abbildung zeigt den Grafen einer Funktion *f*, von welcher man weiß $f(0)=f(4)=f(8)=0$. Der Graf der Funktion schließt zusammen mit der x-Achse die Punktmengen M_1 und M_2 ein, deren Flächeninhalte 2 bzw. 6 sind.



Mit *F* sei die Stammfunktion von *f* bezeichnet, die die Bedingung *F*(0) =-2 erfüllt.

Berechne *F*(4) und *F*(8).

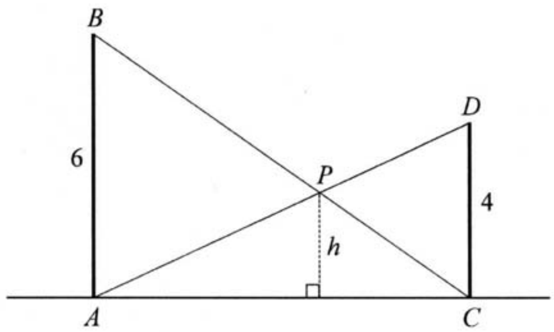
Aufgabe 9 (5 Pkte.):



In einem Koordinatensystem in der Ebene sind die Punkte *A*(1; 0), *B*(-1; 0) und *C*(0; 1) gegeben. In das Dreieck *ABC* ist ein Rechteck einbeschrieben. Zwei der Ecken des Rechtecks liegen auf der Seite *AB,* und die anderen beiden liegen jeweils auf *AC* bzw. *BC.* Die Ecke, die auf der Seite *AC* liegt, sei mit *P* bezeichnet und habe die x-Koordinate *x*.

Bestimme *x* so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird und berechne den maximalen Flächeninhalt.

Aufgabe 10 (5 Pkte.):



Auf einer waagerechten Oberfläche befinden sich zwei senkechte Stangen *AB* und *CD*. Die Stange *AB* ist sechs Meter hoch und *CD* vier Meter. Die Punkte *A* und *D* sowie *B* und *C* sind durch Seile miteinander verbunden, die im Punkte *P* übereinander liegen. Im Folgenden werden die Seile als Geradenabschnitte angenommen, die sich im Punkt *P* schneiden.

Zeige, dass das Geradenstück *AP* genau 1,5-mal so lang ist wie *PD*.

Berechne den Abstand *h* vom Punkt *P* zur waagerechten Oberfläche.

Anschrift des Verfassers:

Jens Mittag, Schulstr. 1, D-24999 Oxbüll,
E-Mail: JensMittag@aol.com