Abituraufgaben aus Frankreich

Die Aufgaben zur schriftlichen Abiturprüfung werden in Frankreich für die jeweiligen Regionen zentral gestellt. Im Mutterland wurden die Aufgaben "National" gestellt, die im folgenden abgedruckt sind. Die vorliegenden Aufgaben wurden im Juni 1998 gestellt.

Den Aufgaben wurden einige praktische Ratschläge vorangestellt:

Zur schriftlichen Abiturprüpfung

Die Texte der Mathematik-Prüfung enthalten zwei Aufgaben und ein unabhängiges Problem. Die zu erreichenden Höchstpunktzahlen für das Problem und für die Aufgaben werden bei den Aufgabenteilen angegeben. Dabei sind folgende Grenzen zu beachten: 8 bis 12 Punkte für das Problem und 4 bis 6 Punkte für jede Aufgabe.

Bei der Serie S, enthält die Prüfung einen allgemeinen Teil und einen spezielleren. Der allgemeine Teil wendet sich an alle Prüflinge und bezieht sich auf die verpflichtenden/ obligatorischen Teile des Lehrplans. Der speziellere Teil bezieht sich auf den Lehrplan des obligatorischen Unterrichts für Prüflinge, die nur diesen belegt haben, oder auf den Lehrplan des obligatorischen Unterichts *und* auf den Unterricht in Spezialgebieten für die Kandidaten, die diesen belegt haben.

Die Modalitäten der schriftlichen Mathematik-Prüfung sind wie folgt:

Serie S, obligatorischer Unterricht 4 Std. Arbeitszeit, Koeffizient 7
Serie S, obligatorischer Unterricht und Unterricht in Spezialgebieten 4 Std. Arbeitszeit, Koeffizient 9

Ratschläge zur Bearbeitung der mathematischen Aufgaben

I. Zu Beginn der Prüfung

- Lesen Sie zunächst den **gesamten** Text einmal langsam durch.
- Schätzen Sie die maximale Zeit ab, die Sie zur Bearbeitung, zur Formulierung und zum Nachrechnen für jede Aufgabe und das Problem unter Berücksichtigung der Angaben auf der Skala benötigen werden.
- Beginnen Sie mit der Aufgabe, die Ihnen am leichtesten zu sein scheint.

II. Während der Prüfung

- Schreiben Sie Ihre Lösungsideen zunächst in die Kladde. Wenn Sie eine Aufgabe gelöst haben, fertigen Sie die Reinschrift an. Wenn Sie eine Aufgabe nicht behandeln können, lesen Sie erneut Ihre Aufzeichnungen in der Kladde durch. Wenn Ihnen alles richtig erscheint, beginnen Sie mit der Formulierung.
- Wenn Sie ein Resultat in Ihrer Arbeit nicht beweisen können, lassen Sie eine Lücke und setzen Sie die Aufgabe fort.
- Vergessen Sie nicht, dass eine Lösung begründet werden muss.

III. Abfassung Ihrer Arbeit

- Trennen Sie die Fragen, rahmen Sie die Ergebnisse ein oder unterstreichen Sie diese; beachten Sie die Angaben im Text.
- Gebrauchen Sie nicht zu oft Tintenkiller. Ihre Arbeit wird dadurch zuweilen unleserlich.
- Die Graphen sind auf Millimeterpapier zu zeichnen, das von der Schulaufsicht zur Verfügung gestellt wird. Wenn die Wahl der Einheiten nicht im Text präzisiert wurden, dann wählen Sie sie so, dass die Figur gut auf das Blatt passt. Vergessen Sie nicht, dass die zugehörigen Tangenten helfen können, einen Graphen zu verbessern.
- Die Zeichnungen der Geometrie-Aufgabe sollen alle notwendigen Punkte enthalten, die zum Verständnis Ihrer Darlegung notwendig sind.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
- Wahrscheinlichkeit, Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Zufallsvariable

Aufgabe 2 (verpflichtend) (5 Punkte)
- Komplexe Zahlen
- Geometrische Interpretation der komplexen Zahlen

Aufgabe 2 (spezialisiert) (5 Punkte)
- Punkte einer Ebene mit MD^2 - MB^2
- Ähnlichkeit

Problem (10 Punkte)
- Funktion der neperschen Logarithmen
- Abschätzung von Funktionen
- Integralrechnung
- Partielle Integration
- Abschätzung von Integralen

Aufgabe 1

In der ganzen Übung seien A und B zwei Ereignisse, $P(A)$ beschreibe die Wahrscheinlichkeit von A, $P(B$ § $A)$ die Wahrscheinlichkeit von B, nachdem A eingetreten ist.

1. Die Anzahl der Kunden, die innerhalb von 5 Minuten in einer Tankstelle eintreffen, sei durch eine Zufallsvariable X beschrieben, deren Wahrscheinlichkeit wie folgt beschrieben werden kann:

$p_i = P(X=i)$

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

a. Definieren und zeichnen Sie den Graphen der Verteilungs-Funktion von X. 1 Pt.

b. Berechnen Sie den Erwartungswert von X. 0,25 Pt.

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde an der Tankstelle Benzin tankt ist 0,7; die, dass er Diesel tankt, 0,3. Die Wahl ist unabhängig von der Wahl des anderen Kunden. Man unterscheide zwischen den folgenden Ereignissen:

C_1: "in 5 Minuten erscheint ein einziger Kunde"
C_2: "in 5 Minuten erscheinen zwei Kunden"
E: "in 5 Minuten verlangt ein einzelner Kunde Benzin"

a. Berechnen Sie $P(C_1 \cap E)$. 1 Pt.

b. Zeigen Sie, dass gilt $P(E/C_2) = 0{,}42$ und berechnen Sie $P(C_2 \cap E)$. 1,25 Pt

c. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 5 Minuten nur ein einziger Kunde Benzin verlangt. 0,5 Pt

3. Y sei die Zufallsvariable für die Anzahl der Kunden, die in 5 Minuten Benzin verlangen. Bestimmen Sie das Verteilungsgesetz für Y. 1 Pt

Aufgabe 2 (verpflichtend)

Die komplexe Ebene sei durch ein orthonormales System beschrieben $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Lösen Sie in **C** die Gleichung (1): $\frac{z-2}{z-1} = z$.

Man gebe zu jeder Lösung den Betrag und ein Argument an. 1 Pt

2. Lösen Sie in **C** die Gleichung (2): $\frac{z-2}{z-1} = i$

Geben Sie die Lösung in algebraischer Form (Real- und Imaginärteil) an. 0,75 Pt

3. M, A und B seien die z, 1 und 2 zugeordneten Punkte. Man nehme an, dass M verschieden ist von den Punkten A und B.

a) Intepretieren Sie geometrisch Betrag und Argument von $\frac{z-2}{z-1}$. 0,75 Pt

b) Finden Sie die Lösung der Gleichung (2) geometrisch. 1 Pt

4 a) Zeigen Sie mit Hilfe einer geometrischen Interpretation, dass alle Lösungen der Gleichung in **C**

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$$

mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ den Realteil $\frac{3}{2}$ haben. 0,75 Pt

b) Lösen Sie in **C** auch die Gleichung (3)

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$$

Man suche die Lösungen mit dem algebraischen Ansatz (Real- und Imaginärteil). 0,75 Pt

Aufgabe 2 (spezialisiert)

In einer orientierten Ebene, in der eine Einheit gewählt wurde, sei ein Rechteck $ABCD$ gegeben mit $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ ist ein rechter Winkel. I bezeichne den Mittelpunkt von $[AB]$.

A. E sei eine Menge von Punkten M der Ebene mit $MD^2 - MB^2 = 1$.

1. Zeigen Sie, dass die Punkte C und I zu E gehören. 0,5 Pt

2. a) Berechnen und konstruieren Sie die Menge E. 0,5 Pt

b) Zeigen Sie, dass die Geraden (BD) und (CI) orthogonal zueinander sind. 0,5 Pt

B. Die Ebene sei durch ein orthonormiertes System $(A;\ \vec{u}, \vec{v})$ mit $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ gegeben.

S sei eine Ähnlichkeitsabbildung, mit Punkt M zugeordnet der komplexen Zahl z, Punkt M' zugeordnet z' so dass $z' = az + b$; dabei sind a und b komplexe Zahlen mit $a \neq 0$.

1. Berechnen Sie die Zahlen a und b für den Fall $S(D) = C$ und $S(C) = B$. 1 Pt

2. T sei eine Ähnlichkeitsabbildung, mit Punkt M zugeordnet z, Punkt M' zugeordnet z', so dass gilt

$$z' = -\frac{i\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i.$$

Bestimmen Sie den Betrag und den Winkel von T. 0,5 Pt

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung T B in I transformiert. 0,75 Pt

4. Folgern Sie die Orthogonalität der Geraden (BD) und (CI) auf andere Weise. 0,5 Pt

5. Zeigen Sie, dass das Zentrum Ω der Ähnlichkeitsabbildung T der Schnittpunkt der Geraden (BD) und (CI) ist. 0,75 Pt

Problem

Die Spuren einer Kurve seien durch ein orthonormales System aufgespannt $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Einheit: 2 cm).

Es wird daran erinnert, dass eine Funktion f "*kleiner*" als eine Funktion g (g "*größer*" als f) auf einem Intervall I genau dann, wenn für alle x aus I gilt: $f(x) < g(x)$.

Teil A

Die Funktionen f und g seien definiert auf $[0; +\infty[$ durch

$$f(x) = \ln(1 + x) \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{2x}{x+2}.$$

Es bezeichne C den Graphen von f und Γ den von g.

f sei "kleiner" g auf dem Intervall $[0; +\infty[$.

h sei eine Funktion auf $[0; +\infty[$, definiert durch
$h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Bestimmen Sie die Wertemenge von h auf $[0; +\infty[$; berechnen Sie $h(0)$. (Der Grenzwert von h für $x \to \infty$ ist nicht gefragt.) 1 Pt

2. Zeigen Sie, dass für alle positiven x oder 0 gilt:

$$(1)\quad \frac{2x}{x+2} < \ln(1+x). \qquad \text{0,25 Pt}$$

3. Konstruieren Sie die Kurven C und Γ und zeigen Sie, dass sie in O eine gemeinsame Tangente D haben, die gezeichnet werden soll. (Man soll kurz die Linienführung dieser Kurven begründen.) 1,5 Pt

Teil B

k sei reell und positiv, man gebe alle linearen Funktionen $x \mapsto kx$ an, die "größer" sind als die Funktion f: $x \mapsto \ln(1+x)$ über$[0; +\infty[$.

Die Funktion f_k sei auf $[0; +\infty[$ durch $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$ definiert.

1. Bestimmen Sie die Wertemenge von f_1 auf $[0; +\infty[$ definiert durch

$f_1(x) = \ln(1+x) - x$. 0,5 Pt

2. Bestimmen Sie den Grenzwert von f_1 für $+\infty$ und bestimmen Sie den Wert von f_1 an der Stelle 0. 0,75 Pt

3. Zeigen Sie, dass für positive x und 0 gilt:

(2) $\ln(1+x) < x$. 0,25 Pt

4. Leiten Sie ab, dass wenn $k \geq 1$ gilt: Für alle $x \geq 0$, $f(x) \leq kx$.

0,5 Pt

5. Das relle k genüge der Bedingung: $0 < k < 1$.
Zeigen Sie, die Ableitung von f_k an der Stelle $x = \dfrac{1-k}{k}$ nicht existiert und untersuchen Sie die Veränderung von f.
(Der Grenzwert von f_k für $+\infty$ ist nicht gefragt.) 1 Pt

6. Zeigen Sie, dass die Werte von k stets positiv sind für alle $x \geq 0$, $f(x) < kx$. 0,5 Pt

Teil C

1. Berechnen Sie das Integral nach der Methode der partiellen Integration:

$$I = \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x.$$

(Man bemerke bei Bedarf, dass $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$.)

Zeigen Sie zuerst, dass $J = \displaystyle\int_0^1 (\mathrm{x} - \ln(1+x))\,\mathrm{d}x$, dann

$$K = \int_0^1 \left(\ln(1+x) - \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x}+2}\right) \mathrm{d}x.$$

(Bei der Berechnung von K kann $\dfrac{2x}{x+2} = 2 - \dfrac{4}{2+x}$ benutzt werden.)

Interpretieren Sie die Werte der Integrale J und K geometrisch, Benutzen Sie dazu die Graphen C, Γ und der Geraden D aus Teil **A**. 2 Pt

2. Die Funktion u sei auf $[0; 1]$ durch folgende Beschreibung definiert:

$u(0) = 1$ und für $x \neq 0$: $u(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion u auf $[0; 1]$ differenzierbar ist.

b) Man nehme an, dass u auf $[0; 1]$ differenzierbar ist und man berechne

$$L = \int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie unter Benutzung der Ungleichungen (1) und (2) aus den Teilen **A** und **B**, dass gilt:

$$\int_0^1 \frac{2}{x+2}\mathrm{d}x < L < 1.$$

Schätzen sie den Wert von auf 10^{-1} genau ab ! 1,25 Pt

[1] *Depouly, D./ Nicolas, S.*, Les Sujets Nathan: 99 BAC corrigés. Maths obligatoire et spécialité S. Editions Nathan, Paris 1998.