



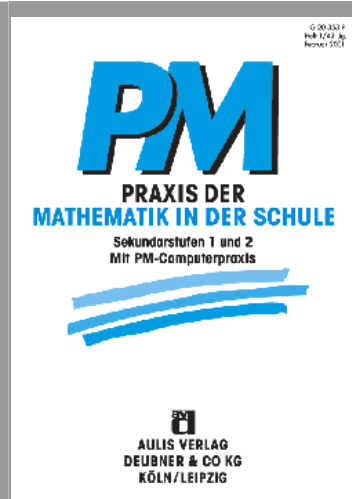
# **PRAXIS DER MATHEMATIK IN DER SCHULE**

**Sekundarstufen 1 und 2  
Mit PM-Computerpraxis**

45. Jahrgang 2003



**AULIS VERLAG DEUBNER  
KÖLN / LEIPZIG**



## Herausgeber:

StDir. Dietrich Pohlmann

## Schriftleitung:

StDir. Dietrich Pohlmann

Satz und Grafiken: DTP-design, 04275 Leipzig

Druck: SZ-Druck  
53757 St. Augustin

© Aulis Verlag Deubner & Co KG Köln / Leipzig 2003

## Wissenschaftlicher Beirat:

- StD F. Barth, München  
 Prof. Dr. J. Flachsmeyer, Greifswald  
 Dr. L. Flade, Halle/Saale  
 Prof. Dr. R. Fritsch, München  
 Prof. Dr. H. Griesel, Kassel  
 Prof. Dr. R. Ineichen, Fribourg/CH  
 Prof. Dr. G. Pickert, Gießen  
 Prof. Dr. H.-J. Vollrath, Würzburg  
 Prof. Dr. H. Zeitler, Bayreuth

ISSN 0032-70472

Die erste (fette) Zahl gibt die Heftnummer, die zweite die Seite an

### PM BEITRÄGE

<i>Zita</i> (†), 2003 – ein schwieriges Problem .....	<b>1</b> , 23
<i>Altmann</i> , Die Ebene im Klassenzimmer .....	<b>3</b> , 107
<i>Arend</i> , Perspektivenwechsel beim Vierseit .....	<b>2</b> , 63
<i>Artmann / Kroll / Pickert</i> , Eine Verallgemeinerung des Kathetensatzes von <i>Euklid</i> .....	<b>3</b> , 121
<i>Bänsch / Dembour</i> , Zusammengesetzte Proportionalitäten .....	<b>1</b> , 16
<i>Bäsler</i> , Numerik im Schulunterricht .....	<b>1</b> , 1
<i>Beckmann</i> , Mathematik in literarischen Texten entdecken .....	<b>3</b> , 128
<i>Brockmeyer</i> , Eigenschaften der zahlen, die sich als Summe zweier Kubikzahlen darstellen lassen .....	<b>4</b> , 190
<i>Bubeck</i> , Analogisieren vom Dreieck zum Tetraeder .....	<b>6</b> , 276
<i>Buchholz</i> , Fragen zur Lösung von $z = i^z$ .....	<b>5</b> , 217
<i>Buth</i> , 40 Liter Regen auf den Quadratmeter – Wie hoch steht das Wasser? .....	<b>4</b> , 191
<i>Dembour</i> , s. <i>Bänsch / Dembour</i>	
<i>Dockhorn</i> , s. <i>Schleicher / Dockhorn</i>	
<i>Engelhaupt</i> , Ergänzende Bemerkungen zu „Eine besondere Spielvariante bei Billard“ .....	<b>3</b> , 140
<i>Engelhaupt</i> , Schleifen erzeugende Funktionen .....	<b>4</b> , 161
<i>Fölsch</i> , Welche Farbe hat mein Hut? .....	<b>6</b> , 289
<i>Furdek</i> , Logistisches Wachstum – und wann der Schein trügt ...	<b>2</b> , 83
<i>Gebhardt</i> , Bericht über eine AG mit Mittelstufenschülern: Geometrie mit Parabeln .....	<b>2</b> , 57
<i>Gorenflo</i> , 2 doppelt-achsensymmetrische Oktominos als Quadrominofiguren .....	<b>1</b> , 17
<i>Gorenflo</i> , Hexiamanten-„Pfeffermühle“ als Triminofigur .....	<b>4</b> , 166
<i>Gorenflo</i> , Achsensymmetrische und nicht-achsensymmetrische Pentominos .....	<b>5</b> , 214
<i>Gorenflo</i> , Pentomino-Hohltriplikationen .....	<b>5</b> , 238
<i>Götz</i> , Zur geometrischen Lösung eines Extremwertproblems und eine analytische Ergänzung .....	<b>2</b> , 69
<i>Gronau / Sewerin</i> , Die XLIII. Internationale Mathematik-Olympiade .....	<b>1</b> , 32
<i>Hackenberg</i> , Vom Kreis zur Parabel .....	<b>4</b> , 178
<i>Hemme</i> , Die Taille des Würfels .....	<b>4</b> , 173
<i>Hertrampf</i> , Überlegungen zu einer stärker vernetzten Einführung der Irrationalzahlen .....	<b>3</b> , 136
<i>Hertrampf</i> , Didaktische Reflektion mit den Modulen des BLK-Programms „SINUS“ .....	<b>5</b> , 226
<i>Hoehn / Walser</i> , Gittergeometrie und pythagoreische Dreiecke ..	<b>5</b> , 215
<i>Humenberger / Vowe</i> , Bemerkung zum paradoxen Ergebnis .....	<b>4</b> , 199
<i>Hümmer</i> (†), s. <i>Strutz / Hümmer</i>	
<i>Janous</i> , Ungleichungen für Primzahlen .....	<b>3</b> , 119

<i>Jungk</i> , Bekanntes Wissen festigen, neues Wissen erwerben .....	<b>2</b> , 61
<i>Klement</i> , Ebene Affinitäten in der Darstellenden Geometrie .....	<b>6</b> , 293
<i>Konwallin</i> , Extrem rasche Konvergenz gegen $\sqrt{2}$ mit Hilfe der Pellischen Gleichung .....	<b>4</b> , 190
<i>Köppen / Stoye</i> , Eine Kopiervorlage zum Arbeiten mit Variablen ..	<b>1</b> , 20
<i>Kroll</i> , s. <i>Artmann / Kroll / Pickert</i>	
<i>Kroll</i> , Eine „geometrische“ Lösung des Berührkreisproblems von <i>Caspar</i> ohne Parabeln .....	<b>3</b> , 139
<i>Kroll</i> , Eine alternative Lösung zu Bestimmung eines Dreiecks aus den Höhenabschnitten .....	<b>4</b> , 167
<i>Langer</i> , Ein paradoxes Ergebnis .....	<b>1</b> , 24
<i>Lanyi</i> , usw und der Bucklige (Kongruenzsätze) .....	<b>2</b> , 75
<i>Lenz</i> , Steinersche Netzwerke .....	<b>4</b> , 180
<i>Linzmaier / Pickert / Rung</i> , Gleichheit von Winkelhalbierendenabschnitten .....	<b>5</b> , 236
<i>Metzger</i> , Untersuchungen zum $(3n+1)$ -Algorithmus. Teil III: Gesetzmäßigkeiten der Ablauffolgen .....	<b>1</b> , 25
<i>Mittag</i> , Die Mathematikprüfung im dänischen „Studentexamen“ .....	<b>5</b> , 231
<i>Mütz</i> , Die Triplex-Punkte und die <i>Eulersche</i> Gerade eines Dreiecks .....	<b>2</b> , 74
<i>Neumayer</i> , Basiswechsel und Koordinatentransformation .....	<b>6</b> , 297
<i>Nieger</i> , Ein Kandidat für den schwersten greifbaren Beweis der Schulmathematik .....	<b>1</b> , 38
<i>Pickert</i> , <i>Cauchy</i> -Ungleichung, Parallelogramminhalt und Umfangwinkelsatz .....	<b>1</b> , 35
<i>Pickert</i> , Ein einfacher Beweis für $ \mathbb{R}^2  =  \mathbb{R} $ .....	<b>2</b> , 82
<i>Pickert</i> , s. <i>Artmann / Kroll / Pickert</i>	
<i>Pickert</i> , Immer Ärger mit den Spiegelungen .....	<b>3</b> , 139
<i>Pickert</i> , Von einem Sehnvierecksatz zu einem Tetraedersatz ..	<b>4</b> , 174
<i>Pickert</i> , Konstruktion von Berührkreisen .....	<b>4</b> , 188
<i>Pickert</i> , s. <i>Linzmaier / Pickert / Rung</i>	
<i>Pickert</i> , Bemerkung zur Summe zweier Kubikzahlen .....	<b>6</b> , 287
<i>Prediger</i> , „Was bedeutet das eigentlich, wenn ich zwei Gleichungen addiere, um eine Variable weg zu kriegen?“ .....	<b>3</b> , 132
<i>Quaisser</i> , Tetraeder und Symmetrien. Teil 1 .....	<b>4</b> , 168
Teil 2 .....	<b>6</b> , 281
<i>Quillmann</i> , Übungen mit dem Satz des <i>Pythagoras</i> zur Ermittlung der Kreiszahl .....	<b>6</b> , 285
<i>Rose</i> , Pyramidenstümpfe mit kleinster Oberfläche .....	<b>4</b> , 179
<i>Rose</i> , Direkte und umgekehrte Proportionalität zwischen Krümmung und Bogenlänge .....	<b>4</b> , 189
<i>Rung</i> , s. <i>Linzmaier / Pickert / Rung</i>	
<i>Schleicher / Dockhorn</i> , „Martins Make-It-Easy-Methode“ .....	<b>5</b> , 238
<i>Schneider</i> , Gibt es Dreiecke, deren Inkreisradius und Seitenlängen eine arithmetische Folge bilden? .....	<b>4</b> , 191
<i>Schneider</i> , Ergänzende Bemerkung zu „Dreiecke, deren ...“ .....	<b>6</b> , 292

Schönwald, Miniaturen zum Geometrieunterricht .....	5, 209
Schönwald, Über die (Un-)Einselbarkeit der Wirkungen mathematischen Tuns .....	6, 291
Schönwald, Hieroglyphische Wörter .....	6, 292
Schröder, Propädeutik des Ableitungsbegriffs – e. Ergänzung ...	1, 37
Schüffler, Über Symmetrie in der Geometrie .....	2, 78
Schüffler, Pythagoras-Beweis Nr. $(n+1)$ .....	6, 286
Spielmann, Wie informativ ist der Korrelationskoeffizient ? .....	3, 116
Sprengel, „mal wieder Extremwertaufgaben .....	3, 109
Strick, Kleine und große Gewinnzahlen beim Zahlenlotto .....	1, 6
Strick, Euro, Euro, wie schnell wirst du wandern ? .....	6, 265
Strick, Entdeckungen mit Parkettierungen der Ebene .....	6, 274
Stoye, s. Köppen / Stoye	
Strutz / Hümmer (†), Der Brustumfang als Ersatzwaage .....	1, 13
Thümmler, Goldene Kette .....	2, 77
Thümmler, Tangentialkreise im Dreieck .....	4, 164
Treiber, Eine Matrizendarstellung der Potenzsummenpolynome	1,
Urmanin, Eine Bemerkung zu „Zur Propädeutik des Ableitungsbegriffs“ .....	1, 37
Urmanin, Ein Beweis der Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel für die Schulpraxis .....	3, 113
Volkert, Über Kreisvierecke .....	5, 218
Vowe, Eine bekannte Aufgabe mit besserer Lösung .....	3, 111
Walser, Eine Schar von Schnittpunkten im Dreieck .....	2, 66
Walser, s. Hoehn / Walser	
Wegner, Was ist das Alabama-Paradoxon ? .....	1, 18
Weisenhorn, Eine Anmerkung zum Logistischen Wachstum .....	5, 239
Wendt, Ein schneller Zugang zur Cauchy-Schwarzschen Ungleichung .....	1, 36
Wendt, Mit linearen Funktionen zum Schwerpunkt eines Dreiecks	3, 118
Wolking, Die endlichen Gruppen von Möbiustransformationen in der Ebene .....	3, 123
Woschner, Eine Geometriestunde in der Pinakothek der Moderne in München .....	6, 288
Wurz, Eine Aufgabe – heftige Diskussionen .....	3, 105
Wurz, Zum Einsatz von Schulbuchaufgaben im Unterricht .....	6, 270

## PM COMPUTERPRAXIS

Red., Der schnelle Link .....	1, 6; 5, 229; 6, 309
Baumann, Computeralgebra-Systeme und der „Geist der Geometrie“ .....	4, 194
Bayer, Katzen auf Zypern .....	1, 44
Brandt, Winkeldreiteilung mit Geodreieck und Euklid .....	4, 196
Erken, Ein kurzes BASIC-Programm zum Galton-Brett .....	4, 192
Herrmann, Ein Java-Applet zur Dreiecksberechnung .....	5, 241
Lehmann, Maschinenüberwachung – Versandabteilung – Warteschlange (Markow-Ketten) .....	3, 141
Oldenburg, Implizites Plotting als didaktisches Instrument .....	5, 240
Rosebrock, Die Cantor-Funktion in Mathematica .....	6, 302
Scheu, Heuristisches Problemlösen nach den Regeln von G. Polya .....	1, 39
Schultz, Primzahlserien in Polynomen zweiten Grades .....	4, 200
Schumann, Körpergeometrie – ein Computerwerkzeug für den Raumgeometrie-Unterricht .....	2, 85
Strick, Abstandsbestimmung bei windschiefen Geraden im Raum mithilfe von EXCEL .....	2, 87
Weisenhorn, Ein einfacher Spigot-Algorithmus für $e$ und $\pi$ .....	4, 193

## PM AUFGABEN

P 1055. Rose-Körner, Dreieckskonstruktion .....	1, 48
P 1056. Gülischer, Immerwährende Schnittpunktsätze „in the eternal triangle“ .....	2, 89
P 1057. Bercea, Geometrischer Ort .....	3, 150
P 1058. Günther / Buth, Sehnen-Tangenten-Vierecke .....	4, 204
P 1059. Spiegelung an Dreiecksseiten .....	5, 244
P 1060. Konstruktion und rationale Maßzahlen .....	6, 302

## PM KURZPROBLEME

Q 364. Gorenflo, Zum Damen-Problem .....	1, 48
Q 365. Haertel, Flächensummen .....	2, 89
Q 366. Jäger, Rationale Punkte auf dem Einheitskreis .....	3, 150
Q 367. Brockmeyer, Fortgesetzte Unterteilung regelmäßiger $n$ -Ecke mit ihresgleichen .....	4, 204
Q 368. Bartniczek, A'la Fermat ? .....	5, 244
Q 369. Rose-Körner, Dreieckskonstruktion .....	6, 305

## PM AUFGABEN MIT LÖSUNGEN

Schwerin, B 13 .....	1, 48
Schwerin, B 14 .....	2, 89
Fegert, A 743 - 746 Bundeswettbewerb Mathematik 2002 - 2. Runde .....	2, 90
König/Sewerin, Lösungen zu den Aufgaben der 43. IMO 2002 .....	2, 97
Schwerin, B 15 .....	3, 150
Weisenhorn, Gleichdicke Monde am allgemeinen Dreieck .....	4, 203
Schwerin, B 16 .....	4, 204
Schwerin, B 17 .....	5, 244
Aufgaben der 1. Stufe der 43. Mathematik-Olympiade (2003) ...	5, 245
Fegert, A 747-750. Bundeswettbewerb Mathematik 2003 - 1. Runde .....	5, 251
Schwerin, B 18 .....	6, 305

## PM NEUE BÜCHER

NEUERSCHEINUNGEN .....	1, 48; 3, 151; 5, 256
Aigner / Ziegler, Das BUCH der Beweise (Hase) .....	1, 50
Alten (Hrsg.), 4000 Jahre Algebra (Stein) .....	6, 307
Balzert, Objektorientierung in 7 Tagen (Heide) .....	3, 154
Barrow, Die Entdeckung des Unmöglichen (Stein) .....	3, 153
Bertelsmann Stiftung, Was kommt nach der Informationsgesellschaft ? (Stein) .....	1, 52
Beutelspacher / Zschiegner, Lineare Algebra interaktiv (Weller)	5, 259
Beutelspacher / Zschiegner, Diskrete Mathematik für Einsteiger (Weller) .....	6, 307
bhv, Sicherheit total (CD; Heide) .....	5, 260
bhv, Schule total 2003 / 04 (9 CDs; Heide) .....	5, 260
Böer, Konkurrenzgeschwindigkeit der Bahn und viele andere gebrochen-rationale Funktionen (Kappes) .....	6, 307
Borucki, Online in die vierte Dimension (Kappes) .....	2, 101
Bosch, Glücksspiele: Chancen und Risiken (Hase) .....	3, 152
Bosch, Statistik: Wahrheit und Lüge (Weber) .....	5, 258
Brezinka, Erziehung und Pädagogik im Kulturwandel (Hase) ...	6, 308
Brill, Mathematik für Informatiker (Bensom) .....	2, 100
Calvin, Wie das Gehirn denkt (Stein) .....	3, 155
Dankmeier, Codierung (Weber) .....	6, 308
Devlin, Das Mathe-Gen (Pohlmann) .....	3, 155
DIALEKT-Projekt, Statistik interaktiv! (Heide) .....	1, 50
Ellenbracht / Langenbruch, Architektur des Lebens (Hase) .....	5, 259
Engelmann (Hrsg.), Duden: Basiswissen Schule: Angewandte Informatik (Stein) .....	6, 308
Feynman, Es ist so einfach (Weller) .....	5, 259
Gäbler, GIMP (Kniffe ... zur Bildbearbeitung)(Weller) .....	3, 154
Glözl, Prinzipien effektiven Unterrichts (Hase) .....	2, 101
Gritzmann / Brandenburg, Das Geheimnis des kürzesten Weges (Hase) .....	5, 258
Hassler, Grundtechniken – Anwendungen – Projekte: Office XP (Heide) .....	5, 260
Hemme, Korfs spannende Rätselgeschichten (Stein) .....	1, 51
Hetzler, Mathematische Zaubertricks für die 5. bis 10. Klasse (Weller) .....	2, 100
Isert, Vom Kerbholz zum Taschenrechner (Weller) .....	5, 257
Kayser, Derive 5 im Mathematikunterricht der Sek. I (Pohlmann)	4, 205
Kayser, Elektronische Arbeitsblätter zur Stochastik in der Sek. I mit Derive 5 (Heide) .....	5, 258
Knauer, Diskrete Strukturen – kurz gefasst (Bensom) .....	3, 153
Knuth, Arithmetik [4. Kap. Der Werkreihe „The Art of Com-	

puter Programming] (Scheu) .....	1, 50
Koch / Neckel (Hrsg.), Unterrichten mit Internet & Co (Weller) .....	1, 51
Koch, JavaScript lernen (Weller) .....	5, 260
Kretschmann, Stressmanagement für Lehrerinnen und Lehrer (Stein) .....	3, 155
Lehmann, Mathematikunterricht mit Parametern in der Sek. I (Weller) .....	3, 153
Leßmann, Tabellenkalkulation (Heide) .....	3, 153
Leuders, Qualität im Mathematikunterricht der Sek. I u. II (Stein) .....	3, 153
Loudon, Algorithmen in C (Heide) .....	2, 101
Mankiewicz, Zeitreise Mathematik (Pohlmann) .....	3, 153
Mayer, Lösungsstrategien für mathematische Aufgaben (Stein) ..	5, 257
Merzyn, Stimmen zur Lehrerausbildung (Stein) .....	1, 51
Mittag / Stemann, Statistik (CD; Kappes) .....	5, 258
Modrow, Informatik mit Delphi (Heide) .....	3, 154
Münz / Nefzger, HTML & Web-Publishing Handbuch (Heide) ..	5, 259
Nehrig, Mathemac's Trainingskarten mit Tangramkontrolle (Weber) .....	4, 205
Niehaves, Freiarbeit im Mathematikunterricht (Kappes) .....	3, 153
O'Hare, Was macht die Mücke beim Wolkenbruch ? (Kappes) ..	5, 260
Paulitsch, Spiele Spiele Spiele (Weber) .....	4, 204
Petzschler, Bau was (Kappes) .....	5, 257
Puscher (Hrsg.), PROST – Problemorientierte Stochastik (Kappes) .....	6, 306
Quak, Mathematik verstehen (Weller) .....	5, 257
Raupp / Scheu, Mathematik unterrichten mit TI 89 und TI 92+ in der Kl. 11 (BW) (Pohlmann) .....	1, 51
Realschule Enger, Bausteine für eigenständiges Lernen 5./6. u. 7./9. Schuljahr (Kappes) .....	3, 155
Red. Computer Easy, Internet (Heide) .....	3, 155
Riegler, Mein Nachhilfe-Lehrer: 6. Schulj: Bruch- und Prozentrechnung (Bensom) .....	3, 152
Rickriem / Stary, Techniken wissenschaftlichen Arbeitens (Weller) .....	3, 155
Scheunpflug, Biologische Grundlagen des Lernens (Stein) .....	6, 308
Schlote, Chronologie der Naturwissenschaften (Hase) .....	5, 259
Schmidt, Prof.Dr.B.Rainstorms Zeichenspaß mit Spiegelbildern (Kappes) .....	1, 50
Schmidt / Shadow, Prof.Dr.R.E. Members Mathe-Memo (Stein) ..	5, 257
Schmidt, Prof.Dr.T.Opfit: Lineare Funktionen (Kappes) .....	6, 306
Schmidt, Prof.Dr.R.E.Member's Gruwis: Grundwissen Mathematik für die Klasse 7 (Kappes) .....	6, 307
Schmidt, Einsatz des Grafikrechners in der S I, Bd. 2 (Stein) ..	6, 307
Schneider, Mathematik: Endspurt zum Abitur (Kappes) .....	1, 50
Schönbeck, Euklid (Stein) .....	5, 257
Schöning, Algorithmik (Weller) .....	6, 308
Siemon, Einführung in die Zahlentheorie (Pohlmann) .....	1, 51
Tarmin, Buch mat 5.A und Buch mat 5.S (Stein) .....	5, 257
Tarmin, Buch mat 2.A, 2.B, 2.C und 2.S (Hase) .....	6, 307
Tenorth (Hrsg.), Kerncurriculum Oberstufe: Mathematik – Deutsch – Englisch (Hase) .....	5, 260
Tschampel, Buch INF 3 und Buch INF 4 (Heide) .....	3, 154
Waibel, Grundwissen Mathematik (Kappes) .....	2, 100
Weltner, Windows XP (Heide) .....	1, 51
Wennekers, Von Dividenden, Zinseszinsen und Preisvergleichen (Kappes) .....	1, 50
Westermann, Mathematische Begriffe visualisiert mit Maple V (Weller) .....	5, 258

Wittstock, Stimmig sprechen – stimmig leben: Körper – Sprache – Mimik (Hase) .....	2, 101
--	--------

## PM BERICHTE & MITTEILUNGEN

Termine • RAAbits Mathematik (32.) • Neuer Mathe Helfer vom Studienkreis • Stochastik (ein Programm für den Stochastikunterricht) • Mathprof (mehr als ein Funktionenplotter) • Xquery-Engine der Fraunhofer IPSI • Nachhaltige Verkehrspolitik (UBA) • Statistikdaten online • Umweltfolgen des Flugverkehrs .....	1, 52
Termine • RAAbits Mathematik (33.) • Benutzerfreundliche Websites der EU • Zu guter Letzt .....	2, 101
DMV-Jahrestagung • DeLFI 2003 • INFOS 2003 • 33. GI-Ta-gung • Systems 2003 • T <sup>3</sup> -Regionaltagungen • Mitmach-Labor Matheaktiv! • ANIMATO • RAAbits Mathematik (34) • Integrierte Lernumgebung fördert innovativen Mathematikunterricht • Fraunhofer-Gesellschaft bietet Wissen online an • Von der Lite-raturdatenbank zur Wissensbank • Pest Patrol • Hilfe! Schimmel im Haus .....	3, 156
Termine • Überarbeitete EPA-Mathematik (2002) • Derive 5.06 im Internet • Wanderfahrten • Abschied von der Wegwerfgesell-schaft .....	4, 205
Termine • RAAbits Mathematik (35) • Pffiffige Mathe-Aufgaben • Auswahlliste zum Deutschen Lernspielpreis 2003 • Comenius-Siegel für das große Tafelwerk-interaktiv • wissenschaftliche Information mit www.vascod.de • Abbau umweltschädlicher Subventionen spart • PM wird bibliographiert .....	5, 261
Termine • Neues vom PC-Wächter • Mathematica 5: umfassend, schnell und skalierbar • WinFunktion in Version 14 • Effiziente Nutzung der Energie birgt großes Einsparpotential • Zum Neuen Jahr .....	6, 308

## PM Arbeitsblätter / Kopiervorlagen

Flade, Übung macht den Meister 3/6 und 4/6 .....	1, 54
Ulshöfer, Rundungen beim Einkaufen .....	1, 56
Flade, Übung macht den Meister 5/6 und 6/6 .....	2, 102
Ulshöfer, Zweisatzaufgaben .....	2, 104
Flade, Übung macht den Meister 7/6 und 8/6 .....	3, 158
Kreusch, Kopfrechnen in <b>R</b> .....	3, 160
Flade, Übung macht den Meister 9/6 und 10/6 .....	4, 206
Kreusch, Konstruktion mithilfe des Thaleskreises .....	4, 208
Flade, Übung macht den Meister 11/6 und 12/6 .....	5, 262
Furdek, Fehler in der Anteilsberechnung I .....	5, 264
Flade, Übung macht den Meister 13/6 und 14/6 .....	6, 310
Göbels, Lösungstexträtsel zu Terme und Gleichungen .....	6, 312

## Errata

S. 205 Hinweise auf Fehler in den Heften 1 – 3 (2003). .....	4, 205
S. 178 re. Sp. (1) $r = \frac{1}{2a}$ und ...	
S. 188 li. Sp. Zeile 5: ... Steinerverhältnis $\sqrt{3} / 2$ ...	

## Kurzfassungen Heft 1

**Numerik im Schulunterricht** PM 45 (2003) 1

C. Bäsler

Der Bereich der Numerischen Mathematik darf nicht als auf andere mathematische Bereiche aufbauende Zusatzdisziplin gesehen werden darf, sondern der Einsatz von Rechnern und numerischen Ideen als Hilfsmittel im Mathematikunterricht selbstverständlich sein sollte. So können auch in vielen anderen mathematischen Gebieten der Einsatz von Rechnern und Ideen aus der Numerischen Mathematik um besseren Verständnis beitragen. Ebenso lassen sich viele andere mathematische Gebiete durch dem Einsatz von Rechnern und mit Hilfe numerischer Methoden besser verstehen. Das wird an Beispielen gezeigt.

**Kleine und große Gewinnzahlen beim Zahlenlotto** PM 45 (2003) 6

H.K. Strick

Dass die Zahl 1, wenn sie bei einer Lottoziehung gezogen wird, die kleinste der Gewinnzahlen dieser Ziehung ist, versteht sich von selbst. Wie sieht es aber bei den übrigen Zahlen aus? Wie groß ist z.B. die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl als kleinste bzw. als zweit-kleinste bzw. ... als größte Zahl einer Wochenziehung gezogen wird? Wie stimmt die Theorie mit der Realität überein? Welche Zahl ist „erwartungsgemäß“ die kleinste, zweit-kleinste, ..., größte einer Wochenziehung? Wenn z.B. die Zahl 23 gezogen wird, ist diese dann am ehesten die kleinste oder die zweit-kleinste oder die dritt-kleinste oder ... die größte der betreffenden Ziehung? Welche Spannweiten zwischen kleinster und größter Gewinnzahl treten auf bzw. müssten theoretisch auftreten?

In diesem Beitrag werden Anregungen für Untersuchungen dieser Fragen mit Hilfe von EXCEL gegeben.

**Der Brustumfang als Ersatzwaage beim Rind** PM 45 (2003) 13

C. Strutz / E. Hümmer (†)

Aus vielen Gründen ist es insbesondere in der Dritten Welt wichtig, die Gewichtsveränderungen bei heranwachsenden Rindern zu bestimmen. Da eine Viehwaage für fast alle Tierhalter der Dritten Welt zu teuer ist, ist ein Hilfsmittel notwendig, welches das Gewicht möglichst genau und möglichst billig schätzen kann: ein Maßband mit Gewichtsskala.

**Zusammengesetzte Proportionalitäten** PM 45 (2003) 16

C. Bäscher / C. Dembour

Proportionale bzw. antiproportionale Zusammenhänge zwischen drei Größen bieten eine große Zahl interessanter, kleiner Anwendungsaufgaben für eine 7. Klasse. Die verschiedenen Lösungswege werden an einem typischen Beispiel kurz gegenübergestellt. Im Physikunterricht werden späterhin auf Grund experimenteller Untersuchungen solcher Zusammenhänge viele wichtige Formeln aufgestellt. Dabei bereitet es stets Schwierigkeiten, den Satz  $((a \sim b \wedge a \sim c) \Rightarrow a \sim b \cdot c)$  plausibel zu machen. Ein kurzer, auch für Schüler z. B. einer 9. Klasse einsichtiger Beweis wird vorgestellt.

**Was ist das Alabama-Paradoxon ?** PM 45 (2003) 18

H. Wegner

Beim Wahlberechnungsverfahren von Hare/Niemeyer kann bei gleicher Stimmenverteilung die Erhöhung der Gesamtsitzzahl (z. B. durch Überhangmandate) für eine Partei zu einem Sitzverlust führen. Dies ist das sogenannte Alabama-Paradoxon. Ein konkretes Beispiel erläutert diese Problematik. Weiter wird gezeigt, dass das Alabama-Paradoxon bei großen Parteien nicht auftreten kann.

**Eine Kopiervorlage zum Arbeiten mit Variablen** PM 45 (2003) 20

J. Köppen / W. Stoye

Bericht aus dem Paetec-Institut für Therapie zur Analyse und Behebung von Rechenfehlern am Beispiel des Rechnens mit Variablen und Termen.

**2003 – ein schwieriges Problem** PM 45 (2003) 23

K. Zita (†)

Arithmetik / Zahlentheorie / Knocheleien um die neue Jahreszahl.

**Ein paradoxes Ergebnis** PM 45 (2003) 24

K. Langer

Es wird ein Rotationskörper vorgestellt, dessen Mantelfläche so groß ist, dass der Körper als Farbtopf genommen zum Streichen dieser Fläche zu klein ist.

**Untersuchungen zum  $(3n+1)$ -Algorithmus Teil III: Gesetzmäßigkeiten der Ablauffolgen** PM 45 (2003) 25

K.H. Metzger

Der Verfasser schildert seine Entdeckungen in den Ablauffolgen des  $(3n+1)$ -Algorithmus und untersucht dabei insbesondere auch die Rolle von Zweierpotenzen.

**Die XLIII. Internationale Mathematik- Olympiade** PM 45 (2003) 32

H.-D. Gronau / H. Sewerin

Bericht über die Austragung des Wettbewerbs 2002 in Glasgow (Großbritannien). Mit Länderübersicht der Spitzengruppe (die ersten 20) und den Texten der 6 Wettbewerbs-Aufgaben.

**Eine Matrizendarstellung der Potenzpolynome** PM 45 (2003) 34

D. Treiber (†)

Die Potenzpolynome lassen sich durch Produkte von ganz einfachen Matrizen darstellen.

**Cauchy-Ungleichung, Parallelogramminhalt und Umfangwinkelsatz** PM 45 (2003) 35

G. Pickert

Im Beitrag wird ein Zusammenhang zwischen den aufgeführten Begriffsbildungen mit Hilfe des Skalarprodukts der Vektorrechnung aufgezeigt. Dabei ergibt sich ein Beispiel für die Verwendung der Vektorrechnung zur Satzfindung.

**Heuristisches Problemlösen nach den Regeln von G. Polya** PM 45 (2003) 39

G. Scheu

Anhand zweier Beispiele wird gezeigt, dass Problemlösen, mit oder ohne Computer, mit einigen Heuristiken und einiger Übung gelernt werden kann. Als Anwendung ist auch an das Lösen von Wettbewerbsaufgaben aller Art gedacht.

**Katzen auf Zypern (Feigenbaum und Chaos)** PM 45 (2003) 44

W. Bayer

Die Dynamik einer Katzenpopulation wird simuliert. Dabei wird das Feigenbaum-Diagramm der Logistischen Parabel erarbeitet und konvergente, periodische und chaotische Folgen gefunden. Der Schmetterlingeffekt wird computer-gestützt nachgewiesen. Eine Unterrichtseinheit für Mathematik oder Informatik 11.

## Kurzfassungen Heft 2

**Geometrie mit Parabeln**

PM 45 (2003) 57

*M. Gebhardt*

In einem Bericht über eine Mittelstufen-AG werden geometrische Sätze untersucht, nachdem die gewöhnlichen Geraden durch Parabeln ersetzt wurden. Unter Verwendung der „begleitenden Tangenten“ wird gezeigt, dass wesentliche Sätze der Euklidischen Geometrie erhalten bleiben. Bei geeigneter Definition des rechten Winkels für Parabeln – hier werden zwei Möglichkeiten genannt – sowie einer passenden Metrik gelten sowohl der Höhensatz als auch der Satz des *Pythagoras* für Parabeldreiecke.

**Bekanntes Wissen festigen, neues Wissen erwerben**

PM 45 (2003) 61

*W. Jungk*

Kenntnis der Eigenschaften von Vierecken gehört zu den wichtigsten Bestandteilen geometrischen Wissens. Die Wiederholung wichtiger Sätze über das Parallelogramm und seiner Sonderformen kann mit der Aufdeckung einer selten behandelten Eigenschaft von Sehnenvierecken verbunden werden.

**Perspektivenwechsel beim Vierseit**

PM 45 (2003) 63

*G. Arend*

Die Teilfiguren eines Vierseits können auf unterschiedliche Weise zu Einheiten verbunden werden, wobei ein methodischer Wechsel der Anschauungen geeignet ist, die Kreativität bei Analyse und Beweis zu fördern. Als Beispiel wird ein Satz über die inneren bzw. äußeren Berührungskreise eines Vierecks bewiesen. Vorausgesetzt wird lediglich die Kenntnis des Umfangswinkelsatzes.

**Eine Schar von Schnittpunkten im Dreieck**

PM 45 (2003) 66

*H. Walser*

Ein einfaches Zeichnungsbeispiel und dessen Variationen führen zur Einsicht, dass es im Dreieck eine zweiparametrische Schar von „merkwürdigen Punkten“, das heißt von Schnittpunkten dreier Linien gibt. Diese Schar umfasst insbesondere den Schwerpunkt als Schnittpunkt der 3 Schwerlinien, den Umkreismittelpunkt als Schnittpunkt der 3 Mittelsenkrechten, den Höhenschnittpunkt und den *Fermat*-Punkt (Fig. 5). Der Inkreismittelpunkt als Schnittpunkt der 3 Winkelhalbierenden gehört aber nicht zu dieser Schar. Für das experimentelle Zeichnen wird Geometrie-Software eingesetzt, für den algebraischen Beweis wird ein Programm eingesetzt, das symbolisch rechnen kann.

**Zur geometrischen Lösung eines Extremwertproblems - und eine analytische Lösung**

PM 45 (2003) 69

*S. Götz*

Nach dem Fußballweltmeisterschaftsjahr 2002 soll eine thematisch dazu passende (und wohlbekannte) Extremwertaufgabe diskutiert werden. Dazu wird über zwei grundsätzlich verschiedene Lösungswege, nämlich einen geometrischen und einen analytischen, berichtet. Zu ersterem werden ein paar ausformulierte Begründungen ergänzt (siehe auch [5]), zweiterer wird verallgemeinert (wiederum im Vergleich zu [5]). Es ergeben sich überraschende Differenzen vor allem in der Länge der eben angesprochenen Lösungswege, so dass ein Beispiel dafür gefunden worden ist, wie sehr die Wahl der Mittel den Fortgang, nicht aber das Ergebnis einer Untersuchung beeinflussen kann.

Es zeigt sich weiters, dass der analytische Lösungsweg auch ohne Differentialrechnung beschränkt werden kann, eine Vorgehensweise, die immer wieder (siehe z.B. [1] oder [2]) propagiert wird.

**Die Triplex-Punkte und die Eulersche Gerade eines Dreiecks**

PM 45 (2003) 74

*K. Mütz*

Der Verfasser definiert einen (Faß-)Kreisbogen über  $\overline{BC}$  in einem Dreieck ABC. Unter allen Punkten dieses Kreisbogens gibt es einen,  $T_a$ , der sich dadurch auszeichnet, dass die Parallelen durch  $T_a$  den Winkel  $\angle BT_aC$  dritteln. Es wird gezeigt, wie man diesen Punkt konstruiert und dass er auf der *Euler*-Geraden des Dreiecks liegt.

**Wsw und der Bucklige: Messungen mit dem Theodoliten**

PM 45 (2003) 75

*C. Lanyi*

Eine der zentralen Einheiten der Geometrie der Mittelstufe sind die Kongruenzsätze und deren Anwendungen. Im Allgemeinen denkt der Mathematiker bei Anwendungen an Konstruktionen und Beweise. Aus Schülersicht sind dies jedoch recht abstrakte Vorgänge die von ihnen deshalb selten als wirkliche Anwendungen empfunden werden. Etwas Auflockerung kann da der Einsatz computergestützter Geometrieprogramme (z.B. Dynageo-Euklid) bringen. Doch bietet diese Stoffeinheit auch hervorragende Möglichkeiten zur praktischen Geometrie. Hier wird der Einsatz eines Theodoliten vorgestellt. Die Auswertung der Messergebnisse führt darüber hinaus zu einer willkommenen Diskussion über Messgenauigkeit und Fehler in realen Situationen.

**Über Symmetrie in der Geometrie**

PM 45 (2003) 78

*K. Schöffler*

Ausgehend vom Parallelenpaar-Axiom und vom 180°-Satz – also von der Translationsinvarianz von Längen und Winkel – zeigen wir die Äquivalenz der Gleichheitsaussagen: Gleiche Schenkel – gleiche (Basis-) Winkel – Spiegelsymmetrie im Rahmen des axiomatischen Aufbaus der Elementargeometrie.

Diese Äquivalenzen – Symmetrieprinzip genannt – können wir beweisen mithilfe einer gleichzeitigen „Symmetrie des logischen Konzepts“. So impliziert beispielsweise die angenommene Implikation: „Wenn gleiche Schenkel, dann auch gleiche Winkel“ selbst wieder ihre eigene Umkehrung: „Wenn gleiche Winkel, dann auch gleich lange Schenkel“.

Dieser Aufsatz stellt ein didaktisches Konzept dieses zentralen Themas der Elementargeometrie dar. Es verbindet das Problem der Anschaulichkeit mit der Axiomatik.

**Logistisches Wachstum – und wann der Schein trügt**

PM 45 (2003) 83

*A. Furdek*

Die bekannte Formel für das logistische Wachstum:

$B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (S-B(t))$  kann auch zu widersprüchlichen und absurden Ergebnissen führen. Der Verfasser zeigt, wieso dies möglich ist und entwickelt dazu einen interessanten Satz.

**Körpergeometrie**

PM 45 (2003) 85

- ein Computerwerkzeug für den Raumgeometrie-Unterricht

*H. Schumann*

Es werden wichtige Forderungen, die an ein aktuelles grafisches Computerwerkzeug zu stellen sind, das im von der Behandlung geometrische Körper geprägten Raumgeometrie-Unterricht der Sekundarstufe I eingesetzt werden soll, angegeben. Das Windowsprogramm KÖRPERGEOMETRIE, das im Wesentlichen die genannten Forderungen erfüllt, wird auf ein Beispiel angewendet.

**Abstandsbestimmung bei windschiefen Geraden im Raum mithilfe von EXCEL**

PM 45 (2003) 87

*H.K. Strick*

Das Minimum wird schrittweise berechnet, indem man zunächst den einen Parameter, z.B.  $s$ , fest hält und den anderen ( $t$ ) minimiert; man erhält damit einen quadratischen Term in  $s$ , für den man wieder das Minimum bestimmt.

## Kurzfassungen Heft 3

### Eine Aufgabe – heftige Diskussionen

PM 45 (2003) 105

L. Wurz

Angestoßen durch TIMSS und verstärkt durch PISA wird in der Mathematikdidaktik u.a. die Frage nach dem nachhaltigen Lernen intensiv diskutiert. Durch verschiedene innovative Veränderungen wie z.B. durch die Weiterentwicklung der Aufgabenkultur, durch kumulatives Lernen, aber auch durch die Einführung von Jahrgangsarbeiten, in denen der Stoff eines ganzen Jahres abgefragt wird, wurden erste Schritte unternommen, um Merkfähigkeit und Verständnis beim Schüler zu stärken. Damit einher geht zwangsläufig die Diskussion um das Basiswissen, über das er am Ende einer Lernperiode verfügen sollte.

In diesem Beitrag wird eine Aufgabe einer Jahrgangsarbeit für die Klasse 6 vorgestellt, die unter Lehrkräften sehr kontrovers diskutiert wird. Neben dem „Beweis“, dass in dieser Aufgabe ausschließlich Basiswissen abgefragt wird, werden noch verschiedene Übungsbeispiele vorgestellt, in denen Bekanntes und „Selbstverständliches“ in verschiedenen Zusammenhängen geübt wird.

### Die Ebene im Klassenzimmer

PM 45 (2003) 107

C. Altmann

Nachdem sich Schüler 3 nicht auf einer Geraden liegende Punkte im eigenen Klassenraum überlegt haben, werden diese markiert und mit Schnüren verbunden, so dass ein Ausschnitt einer Ebene im Klassenzimmer entsteht. Die Gleichung dieser Ebene wird nun aufgestellt und mit Hilfe des Hesseschen Normalform der Abstand von Punkten zur Ebene bestimmt.

### ’mal wieder Extremwertaufgaben

PM 45 (2003) 109

H.J. Sprengel

Es werden Extremwertaufgaben aus der 1. Stufe der Mathematik-Olympiaden vorgestellt, die im Unterricht für eine lockere Propädeutik zu diesem Problemkreis bewährt haben.

### Eine bekannte Aufgabe mit besserer Lösung

PM 45 (2003) 111

M. Vowe

Die bekannte Aufgabe zur Maximierung eines quaderförmigen offenen Behälters bei vorgegebener quadratischer Materialfläche – in verbesserter Lösung

### Ein Beweis der Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel für die Schulpraxis

PM 45 (2003) 113

Z. Urmanin

Die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel für  $n$  Zahlen wird induktiv bewiesen. Durch Anwendung der Ungleichung  $q^n \geq 1 + (1-1/q)n$ , die dabei eine entscheidende Rolle spielt, lässt sich der Beweis - ohne weitere theoretische Anstrengung - leicht in den Oberstufenunterricht einfügen. In substantieller Kontinuität ergibt sich darüber hinaus noch ein der Schule angemessener Zugang zu der Hölderschen Ungleichung.

### Wie informativ ist der Korrelationskoeffizient ?

PM 45 (2003) 115

M. Spielmann

Die rechnerischen Kenngrößen der Regressionsanalyse liefern nur unzureichende Informationen. Man kann daher auf eine graphische Darstellung nicht verzichten. Umgekehrt vermittelt die oberflächliche Betrachtung der graphischen Veranschaulichung ein falsches Bild von der Qualität der Regressionsbeziehung.

### Mit linearen Funktionen zum Schwerpunkt eines Dreiecks

PM 45 (2003) 118

P. Wendt

Legt man ein Koordinatensystem geschickt über ein Dreieck, so lässt sich das Teilungsverhältnis der Seitenhalbierenden mit den Techniken, die Achtklässler in den Themengebieten Lineare Funktionen und Lineare Gleichungen mit Parametern lernen, behandeln.

### Ungleichungen für Primzahlen

PM 45 (2003) 119

W. Janous

In diesem Überblicksartikel werden im Anschluss an zwei jüngst in dieser Zeitschrift erschienene Notizen verschiedene Ungleichungen älteren und neueren Datums für Primzahlen referiert bzw. bewiesen, die als rein mathematisches „Hintergrundwissen“ für die unterrichtliche Tätigkeit gedacht sind.

Dabei wird auch der mühsam verlaufende Erkenntnisfortschritt bei manchen Fragestellungen deutlich - etwa beim Problem, durch das das *Bertrandsche* Postulat verallgemeinert wird und das danach fragt, für welche Exponenten  $\alpha < 1$  das Intervall  $(x, x+x^\alpha]$ ,  $x \geq 1$ , eine Primzahl enthält.

### Die endlichen Gruppen von Möbiustransformationen in der Ebene

PM 45 (2003) 123

W. Wolking

Es wird eine nicht selten angewandte Lösungsstrategie zur Bestimmung von Gruppenstrukturen vorgestellt, die sich im wesentlichen durch vier Schritte beschreiben lässt: Erweiterung des Definitionsbereichs, Zerlegung der Elemente in einfache Transformationen, woraus eine bestimmende Eigenschaft folgt, Verlagerung des Problems und Herleitung der Gruppen. Für den Schulunterricht kann man sich auf den eindimensionalen Fall, die reelle Zahlengerade, beschränken, wodurch die Untersuchungen erheblich einfacher werden.

### Mathematik in literarischen Texten entdecken

PM 45 (2003) 128

A. Beckmann

Gelegentlich enthält Literatur Mathematik oder mathematische Bezüge, so dass sie dazu anregen kann, sich mit bestimmten mathematischen Themen auseinander zu setzen. Eine besondere Möglichkeit für den Mathematikunterricht bieten kurze Stücke wie Gedichte, Parabeln, Fabeln usw. In der Computeranwendung *Matex*, die unter [www.mathematik-unterrichten.de](http://www.mathematik-unterrichten.de) verfügbar ist, sind entsprechende Stücke anwählbar. Die verschiedenen Programmkomponenten unterstützen eine Mathematisierung und regen damit eine Beschäftigung mit verschiedenen mathematischen Gebieten an.

### „Was bedeutet das eigentlich, wenn ich ...“

PM 45 (2003) 132

S. Prediger

Ausgangspunkt des im Artikel beschriebenen Dialogs ist die Frage eines Schülers nach der geometrischen Interpretation des Additionsverfahrens für Lineare Gleichungssysteme. Die Klärung dieser Frage eröffnet das Feld für die Diskussion einer fundamentalen Idee der Mathematik, die Idee des Beschreibungswechsels, hier zwischen Geometrie und Algebra. Von da aus ist es im Dialog mit dem Lernenden kein weiter Weg mehr zum Gespräch über den „Sinn des sinnlosen Umformens“, einer Leitidee der Algebra. Mit dem Dialog soll gezeigt werden, dass im ernsthaften und tiefgehenden Verfolgen von Schülerfragen interessante Lernchancen stecken, die wir nicht verschenken sollten.

### Überlegungen zu einer stärker vernetzten Einführung der Irrationalzahlen

PM 45 (2003) 136

M. Hertrampf

In der Grundschule werden im Kontext von Zählen, Vergleichen und Messen sog. „big ideas“ der Mathematik vermittelt. Es erscheint sinnvoll, in der Sekundarstufe diesen Faden wieder aufzunehmen, um ein gut vernetztes Fundament für das Verständnis der Irrationalität zu erzeugen. Vorgestellt wird ein didaktischer Entwurf, dessen curriculare Einordnung nach den Kongruenzsätzen und vor der Satzgruppe des *Pythagoras* vorgesehen ist.

### Maschinenüberwachung – Versandabteilung - Warteschlange

PM 45 (2003) 141

E. Lehmann

Probleme aus dem Bereich der *Markov*-Ketten zeichnen sich aus durch

- (1) hohen Anwendungsbezug,
- (2) gute Visualisierungsmöglichkeiten für Ketten mit zwei Zuständen,
- (3) vielseitige Modellierungsmöglichkeiten mit gebietsübergreifenden, dennoch auch voneinander unabhängigen Bearbeitungsmethoden aus Analysis, linearer Algebra und Stochastik,
- (4) vielfache Möglichkeiten des Computereinsatzes als Rechen- und Zeichenhilfsmittel und zum Experimentieren durch Modellrechnungen.

In dem Beitrag werden alle Aspekte bis auf (2) angesprochen.

## Kurzfassungen Heft 4

### Schleifen erzeugende Funktionen PM 45 (2003) 161

H. Engelhaupt

Eine Funktion  $f$  erzeugt eine Schleife der Länge 3, wenn  $f(f(f(a))) = a$  für fast alle reellen Zahlen  $a$  gilt. Am Beispiel des rationalen Funktionstyps mit

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

werden Bedingungen für Schleifen erzeugende Funktionen hergeleitet und deren Eigenschaften genauer untersucht. Eine geometrische Veranschaulichung visualisiert den Iterationsvorgang.

### Tangentiale Kreise im Dreieck PM 45 (2003) 164

S. Thümmler

Neben Um- und Inkreis gibt es im Inneren des Dreiecks weitere Kreise zu entdecken, die zwar hinsichtlich Ihrer Lage eine konstruktive Beziehung zu den Mittelpunkten von Um- und Inkreis haben, deren Elemente sich aber dennoch nur auf indirektem Wege bestimmen lassen. Die Anordnung der neuen Kreise und ihr Verhalten bei Verformung des Dreiecks lassen einen Zusammenhang mit der *Euler*-Geraden erkennen.

### Eine alternative Lösung zu „Bestimmung eines Dreiecks aus den Höhenabschnitten“ PM 45 (2003) 167

W. Kroll

Der besondere Reiz dieser Aufgabe besteht darin, dass sie ein Beispiel für Anwendungen der Analysis in einem größeren Kontext als üblich liefert.

### Tetraeder und ihre Symmetrien. Teil 1 PM 45 (2003) 168

E. Quaisser

Der Beitrag zeigt einige Erkundungsmöglichkeiten am Tetraeder aus, die bereits für die Sek. I zugänglich sind. Das Tetraeder ist das einfachste, aber oft nur am Rande betrachtete Polyeder. Im Vordergrund stehen Symmetrieaspekte, und diesbezügliche Klassifizierungs- und Realisierungsfragen.

### Die Taille des Würfels PM 45 (2003) 173

H. Hemme

Ein Kreisring kann so um einen Würfel gelegt werden, dass er ihn zwar nur locker umschließt, sich aber trotzdem nicht von ihm lösen lässt. Diese Würfelenebene ist seine Taille. Es wird nun berechnet, wie groß ein Ring sein darf, damit er nicht von der Taille eines Einheitswürfels gestreift werden kann.

### Von einem Sehnenvierecksatz zu einem Tetraedersatz PM 45 (2003) 174

G. Pickert

Ausgehend von einem Sehnenvierecksatz wird ein Tetraedersatz gewonnen, als Anreiz, sich stärker mit räumlicher Geometrie zu befassen. Für beide (bekannte) Sätze werden verschiedene Beweise vorgestellt, so dass die Wirksamkeit der angewandten Beweismethoden verglichen werden kann.

### Vom Kreis zur Parabel PM 45 (2003) 178

D. Hackenberg

Vom Scheitelkrümmungskreis der Parabel als dem „bestmöglich passenden“ ausgehend wird eine sehr einfache Konstruktion der Parabel vorgestellt. Die Absicht ist, der zu einseitigen Betonung als Schaubild der quadratischen Funktion bei der Behandlung der Parabel im Unterricht der Mittelstufe durch Aufzeigen geometrischer Zusammenhänge entgegenzuwirken und, wenn möglich, Anregungen für eigene Entdeckungen zu geben.

### Pyramidenstümpfe mit kleinster Oberfläche PM 45 (2003) 179

Rolf Rose

Verpackungen und Gefäße sind ökonomisch und tragen zur Ökologie bei, wenn bei einem vorgeschriebenen Volumen die Oberfläche minimal ist. Um möglichst viele Formen (offene oder geschlossene Prismen, Zylinder, Pyramiden und Kegel) verschiedenster Art gleichzeitig zu erfassen, wurde nach der minimalen Oberfläche eines Pyramidenstumpfes mit einem eingeschriebenen Rotationskegelstumpf gefragt.

### Steinersche Netzwerke PM 45 (2003) 180

H. Lenz

$n$  Punkte sollen durch ein möglichst kurzes Wegenetz verbunden werden. Über dieses Problem sind bis in die 90-er Jahre laufend Forschungsarbeiten erschienen. Andererseits eignen sich seine einfachen Aspekte auch für Leistungskurse und Arbeitsgemeinschaften der Sek. II. Das Dreipunktpproblem kann sogar im Geometrieunterricht der Sek. I behandelt werden.

### Ein kurzes BASIC-Programm zum Galton-Brett PM 45 (2003) 192

T. Erken

Mit herabfallenden Scheiben wird ein *Galton*-Brett simuliert. Neben der Anzahl der Versuche kann ein weiterer Eingabewert das Verhältnis links/rechts beschreiben, wodurch auch ein schräg stehendes *Galton*-Brett simuliert werden kann.

### Ein einfacher Spigot-Algorithmus für $e$ und $\pi$ PM 45 (2003) 193

P. Weisenhorn

Ausgehend von den bekannten Reihenentwicklungen für  $e$  und  $\pi$  (*Wallis*produkt) wird ein Rechenverfahren entwickelt, das die Ziffern tropfenweise ausgibt.

### Computeralgebra-Systeme und der „Geist der Geometrie“ PM 45 (2003) 194

R. Baumann

Am Beispiel des „Ortslinienproblems mit Variationen“ aus PM 43 (2001) wird auf ein Dilemma des künftigen computerunterstützten Unterrichts der Analytischen Geometrie aufmerksam gemacht: Das Computeralgebra-System ermöglicht einerseits auch durchschnittlichen Schülern das selbständige Finden von Konstruktionen und Beweisen, andererseits aber könnten dabei die – oft geistvollen – herkömmlichen geometrischen Konstruktionen und Beweise vernachlässigt werden bzw. in Vergessenheit geraten.

### Winkeldreiteilung mit Geodreieck und Euklid PM 45 (2003) 196

D. Brandt

Klassische Konstruktionen erlauben als Zeichengeräte nur Zirkel und Lineal. Bekanntlich kann man damit die Dreiteilung eines beliebigen Winkels nicht durchführen. Der Beitrag zeigt, wie man aber unter Verwendung des Geodreiecks oder auch mit Hilfe einer dynamischen Geometriesoftware diese klassische Aufgabe lösen kann.

### Primzahlserien in Polynomen zweiten Grades PM 45 (2003) 200

A. Schultz

Seit *Euler* weiß man, dass die Werte des Polynoms  $n^2 + n + 41$  für  $n = 0, 1, \dots, 41$  eine ununterbrochene Serie von Primzahlen bilden. Eine besondere zahlen-theoretische Eigenschaft der Diskriminante dieses Polynoms ist dafür verantwortlich. Der Schlüssel für die Auffindung anderer quadratischer Polynome mit Primzahlserien liegt darin, Diskriminanten mit derselben Eigenschaft auszuwählen. Ein entsprechendes Programm wird vorgestellt.

## Kurzfassungen Heft 5

### Miniaturen zum Geometrieunterricht PM 45 (2003) 209

H.G. Schönwald

1. Eine problemorientierte Herleitung des Dreiecksschwerpunktsatzes
2. Ein kurzer verbaler Beweis des Dreiecksschwerpunktsatzes
3. Ein rein verbaler Beweis des Umfangswinkelsatzes
4. Überlegungen mit 2 (Paaren von) Quadraten
5. Warum ist die Kugeloberfläche so groß wie die Umzylinder-Mantelfläche und damit viermal so groß wie die Äquatorfläche ?
6. Über die Zerlegung der Kugel in einfache Bruchteile
7. Ist ein Kreis auch eine Ellipse ?
8. Zwei Üb(er)legungen zum Verstehen der vektoriellen Formen der Ebenengleichungen

### Gittergeometrie und pythagoreische Dreiecke PM 45 (2003) 215

A. Hoehn / H. Walsler

Werden in einem Quadrat die Ecken mit nicht anliegenden Seitenmitten verbunden, entsteht ein Achteckstern, der als Teilfigur das pythagoreische Dreieck mit dem Seitenverhältnis 3 : 4 : 5 enthält. Eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion im Quadratgitter gibt einen Zugang zu sämtlichen pythagoreischen Dreiecken. Das Verfahren lässt sich auch auf das regelmäßige Dreiecksgitter übertragen. Die dabei entstehenden Figuren können zu vier- und sechsteiligen Sternfiguren ergänzt werden.

### Über Kreisvierecke PM 45 (2003) 218

K. Volkert

Kreis- oder Sehnenvierecke bilden einen interessanten Gegenstand der Elementarmathematik, welcher auch den Methoden der Schulgeometrie zugänglich ist. In einem ersten Teil wird auf die Geschichte der Kreisvierecke eingegangen, während die nachfolgenden Abschnitte dem *Euklidischen* Kriterium und der *Brahmagupta*-Formel einschließlich Beweisen gewidmet sind. Schließlich wird auf die Konstruktion des Kreisvierecks aus seinen 4 Seiten eingegangen. Einige didaktische Bemerkungen beschließen den Artikel.

### Didaktische Reflektion mit den Modulen des BLK-Programms „SINUS“ PM 45 (2003) 226

M. Hertrampf

Am 31.03.03 endete die Laufzeit des BLK-Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (SINUS)“. Über alle Ländergrenzen ist man sich einig, dass die in diesem Programm entwickelten Ansätze fortgeführt und weitergegeben werden müssen. Die 11 Module, die den lerntheoretischen Rahmen der Innovationsbemühungen beschreiben, werden anhand eines Beispiels aus dem Fach Mathematik erläutert.

### Die Mathematikprüfung im dänischen „Studentereksamen“ PM 45 (2003) 231

J. Mittag

Der Autor schildert die Regularien für die dänische Reifeprüfung, insbesondere mit Beispielen aus den üblichen schriftlichen Mathematik-Prüfungen. Die dänische Reifeprüfung ist eine zentrale Prüfung; sie besteht aus mehreren Teilprüfungen, die in den 3 Jahren der gymnasialen Schulzeit jeweils am Ende des Schuljahres (Mai / Juni) auf verschiedenen Niveaus abzulegen sind.

### Gleichheit von Winkelhalbierendenabschnitten PM 45 (2003) 236

M. Linzmaier, G. Pickert, J. Rung

Die äußeren Abschnitte zweier Winkelhalbierenden eines Dreiecks sind gleich lang, genau dann wenn die beiden Winkel gleich groß sind oder der dritte Winkel  $60^\circ$  ist. Für diesen durch eine Aufgabe in einer Klassenarbeit motivierten kleinen Satz werden 4 Beweise gegeben, die in unterschiedlichen Jahrgangsstufen behandelt werden können.

### „Martins Make-It-Easy-Methode“ PM 45 (2003) 238

M. Schleicher / C. Dockhorn

Bei der Behandlung der Strahlensätze kommt man algebraisch schnell zu Verhältnisgleichungen. Ein Schüler hat für deren Lösung ein besonderes Verfahren entdeckt, dass in der Klasse als „Martins Make-It-Easy-Methode“ bezeichnet wurde. Der Beitrag zeigt, warum auch diese Methode korrekte Ergebnisse liefert.

### Implizites Plotting als didaktisches Instrument PM 45 (2003) 240

R. Oldenburg

Implizites Plotten ist die Darstellung der Nullstellenmenge von Funktionen. Im Gegensatz zu normalen Funktionsgraphen kann damit der Relationenaspekt des Funktionsbegriffs an motivierenden Beispielen herausgearbeitet werden.

### Ein Java-Applet zur Dreiecksberechnung PM 45 (2003) 241

D. Herrmann

Am Beispiel *Berechnung eines Dreiecks, gegeben durch 3 Seiten* wird das objektorientierte Vorgehen demonstriert: Wahl der passenden Klasse, Testen der erstellten Klasse und Einbettung in eine graphische Benutzeroberfläche in der Programmiersprache Java. Jeder der Schritte wird durch eine separate Klasse realisiert. Das Zusammenwirken der drei Klassen wird durch ein UML-Klassendiagramm (UML = *Unified Modeling Language*) veranschaulicht. Besonderer Wert wird eine saubere Programmierung gelegt, wobei die Sonderfälle *das eingegebene Dreieck existiert nicht* bzw. die Eingabe misslingt besonders berücksichtigt werden. Der Programmcode benützt die Swing-Klassen von Java 2; zum Nachvollziehen sollte ein neuerer Java-Compiler verfügbar sein.

### Bundeswettbewerb Mathematik 2003, 1. Runde PM 45 (2003) 251

K. Fegert

Die Aufgaben der zweiten Runde des diesjährigen Bundeswettbewerbs Mathematik werden vorgestellt. Zusätzlich zu den Lösungen werden Hinweise auf typische Fehler gegeben und Möglichkeiten zum Einsatz im Mathematikunterricht aufgezeigt.

## Kurzfassungen Heft 6

**Euro, Euro, wie schnell wirst du wandern ?** PM 45 (2003) 265

*H.K. Strick*

Im Rahmen eines Euro-Münz-Projekts am Landrat-Lucas-Gymnasium, Leverkusen, wird untersucht, wie schnell die „Durchmischung“ der in der Region im Umlauf befindlichen Münzen vor sich geht. Aufgrund der monatlichen Stichproben wird eher ein langwieriger Prozess erwartet.

Im Beitrag wird angeregt, bereits in Klassenstufe 8 Prognosen hinsichtlich der weiteren Entwicklung mithilfe von linearen Modellen (Regressionsgeraden) vorzunehmen; sogar die Grenzen der Modellbildung können verdeutlicht werden.

**Zum Einsatz von Schulbuchaufgaben im Unterricht** PM 45 (2003) 270

*L. Wurz*

Bei den Übungsaufgaben, die in den Schulbüchern zu den binomischen Formeln gestellt werden, steht das Automatisieren der Rechenfertigkeit im Vordergrund. Bekanntlich ist die Vergessensquote vor allem im Blick auf das „Mittelglied“ sehr hoch. In diesem Beitrag wird gezeigt, wie durch eine kreative Weiterentwicklung dieser Aufgaben Schüler im mathematischen Denken geschult werden, was langfristig auch zu einem nachhaltigeren Lernen führt.

**Entdeckungen mit Parkettierungen der Ebene** PM 45 (2003) 274

*H.K. Strick*

An drei Beispielen wird dargestellt, dass das geeignete Übereinanderlegen von einfachen Parkettierungen der Ebene zur Lösung von Zerlegungsproblemen führen kann: Im Beitrag werden zwei Zerlegungsbeweise des Satzes von Pythagoras vorgestellt und das Problem gelöst, ein Achteck in ein flächengleiches Quadrat zu umzuwandeln.

**Analisisieren vom Dreieck zum Tetraeder** PM 45 (2003) 276

*H. Bubeck*

Analisisieren bedeutet interpretieren und kann - von derselben ebenen Figur ausgehend - zu verschiedenen, räumlich analogen Figuren führen. Diese Tatsache veranlasst raumgeometrische Untersuchungen und ermöglicht eine flexible, differenzierte und kreative Betrachtungsweise der Figuren und ihrer Eigenschaften.

**Tetraeder und ihre Symmetrien II** PM 45 (2003) 281

*E. Quaisser*

In Fortsetzung des 1. Teils wird ausgehend von den 8 Symmetrieklassen eine Hierarchie der Symmetrietypen vorgestellt. Es gelingt eine bemerkenswerte Charakterisierung der Symmetrietypen mit Kantenlängen, mit den Seitenflächen, mit dem umschreibenden Spat sowie mit speziellen ebenen Schnitten. Dabei wird auch auf konstruktive Aspekte eingegangen. Von besonderem Interesse sind die Disphenoide.

**Übungen mit dem Satz des Pythagoras zur Ermittlung der Kreiszahl** PM 45 (2003) 285

*H. Quillmann*

Es wurden möglicherweise zwei bisher nicht bekannte Formeln zur Ermittlung der Kreiszahl in an sich bekannter Art nach der Vieleckmethode nur mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes abgeleitet.

**Pythagoras-Beweis Nr. (n+1)** PM 45 (2003) 286

*K. Schöffler*

Mit diesem neuen Beweis des Satzes von *Pythagoras* soll eine Methode bekannt gemacht werden, welche in den axiomatischen Grundlagen der Elementargeometrie eine sehr nützliche Rolle spielt: die Symmetrie in Logik und Geometrie.

**Eine Geometriestunde in der Pinakothek der Moderne in München** PM 45 (2003) 288

*H. Woschner*

Bei einer etwa einstündigen Führung durch die Pinakothek der Moderne in München kann ein(e) Mathematiklehrer(in) den Schülern mehr von seinem Fach vermitteln als ein(e) hauptamtliche(r) Führer(in). Sieben Stationen einer solchen Führung werden vorgestellt.

**Welche Farbe hat mein Hut ?** PM 45 (2003) 289

*G. Fölsch*

Drei Spieler, die die rote oder blaue Hutfarbe jeweils der beiden anderen sehen, aber nicht die eigene, sollen diese erraten. Wird dabei eine bestimmte Strategie angewandt, die mit dem dreimaligen Werfen einer Münze zusammenhängt, so ergibt sich eine verblüffend hohe Gewinnwahrscheinlichkeit für die Gruppe. Ist dieses Spiel wesensverwandt mit der klassischen Denksportaufgabe, in der Indianer drei Weiße je an einen roten oder blauen Pfahl gebunden haben ?

**Ebene Affinitäten in der Darstellenden Geometrie** PM 45 (2003) 293

*H. Klement*

Ebene Affinitäten zu Beginn des Grundkurses Darstellende Geometrie betonen den zentralen Abbildungsbegriff. Sie führen zur rechnungsfreien Untersuchung der affinen Bilder von Kreisen und Ellipsen und zur klaren Unterscheidung von Achsenaffinitäten und Parallelperspektivitäten. Ein gestufter Beweis des Satzes von *Pohlke* wird leicht zugänglich.

**Basiswechsel und Koordinatentransformation** PM 45 (2003) 297

*B. Neumayer*

Beliebige Vektoren n-dimensionaler Vektorräume lassen sich als Linearkombination von Basisvektoren unterschiedlicher Basen darstellen. Betrachtet werden die Übergänge zwischen den einzelnen Basen eines Vektorraumes, sowie die Abbildung von einem n-dimensionalen in einen m-dimensionalen Vektorraum. Ebenso wird die Koordinatentransformation eines Vektors bei Basiswechsel betrachtet. Es wird gezeigt, dass sich alle Transformationen als Matrizen darstellen lassen, womit die Matrizenalgebra zur Anwendung kommt. Die Veranschaulichung geschieht über ein Struktur-Quadrat. Ersichtlich wird, dass die Spalten- und Zeilenschreibweise von Vektoren nicht vertuscht werden darf. Anhand von einfachen Beispielen aus einem 2-dimensionalen Vektorraum werden die Zusammenhänge verdeutlicht und anwendungsbezogen vertieft.

**Die Cantor-Funktion in Mathematica** PM 45 (2003) 302

*S. Rosebrock*

Wir untersuchen hier die *Cantor-Menge*, die *Cantor-Funktion* und ähnliche Funktionen. Dabei wird, soweit möglich, auf die Methoden der Analysis verzichtet. Beweise zur *Cantor-Funktion* werden elementar zahlentheoretisch geführt. Mit Hilfe des Software-Pakets Mathematica werden einige Verallgemeinerungen untersucht.

Der Beitrag soll möglichst elementar zum Nachdenken über die *Cantor-Menge* anregen und zum Spielen mit dem Computer verführen.