

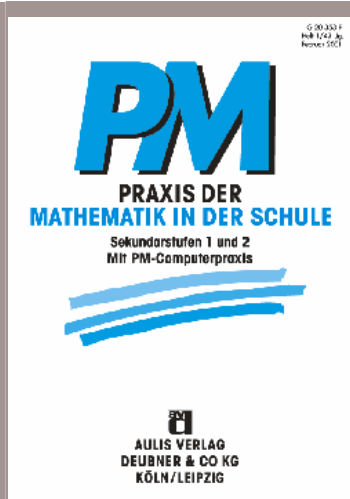
PRAXIS DER MATHEMATIK IN DER SCHULE

**Sekundarstufen 1 und 2
Mit PM-Computerpraxis**

46. Jahrgang 2004



**AULIS VERLAG DEUBNER
KÖLN/LEIPZIG**



Herausgeber:

StDir. Dietrich Pohlmann

Schriftleitung:

StDir. Dietrich Pohlmann

Satz und Grafiken: DTP-design, 04275 Leipzig

Druck: SZ-Druck
53757 St. Augustin

© Aulis Verlag Deubner & Co KG Köln / Leipzig 2004

Wissenschaftlicher Beirat:

- StD F. Barth, München
- Prof. Dr. J. Flachsmeyer, Greifswald
- Dr. L. Flade, Halle/Saale
- Prof. Dr. R. Fritsch, München
- Prof. Dr. H. Griesel, Kassel
- Prof. Dr. R. Ineichen, Fribourg/CH
- Prof. Dr. G. Pickert, Gießen
- Prof. Dr. H.-J. Vollrath, Würzburg
- Prof. Dr. H. Zeitler, Bayreuth

ISSN 0032-70472

Die erste (fette) Zahl gibt die Heftnummer, die zweite die Seite an

PM BEITRÄGE

<i>Red.</i> , Ihre PM wird modernisiert	5 , 240
<i>Zita</i> (†), 2004 – vorletzte Spielerei	1 , 34
<i>Zita</i> (†), 2005 – letzte Spielerei	6 , 279
<i>Ahbe</i> , Zum Umgang mit Potenzreihen im Analysis-Grundkurs ..	5 , 201
<i>Bauer</i> , Eine merkwürdige Abbildung der Punkte eines Intervalls auf eine seiner Teilmengen	6 , 284
<i>Bayer</i> , Wachstumsende von Jugendlichen	4 , 170
<i>Bosch</i> , Über die Anzahl gleicher Gewinnzahlen im Lotto in Deutschland und Österreich	3 , 112
<i>Brockmeyer</i> , Experimentelle Ermittlung von Reihensummen	1 , 19
<i>Brockmeyer</i> , Generieren großer magischer Quadrate aus bekannteren kleineren	2 , 85
<i>Brockmeyer</i> , Polygonalzahlen, die zugleich Quadratzahlen sind	6 , 244
<i>Buchholz</i> , Rekursion und Iteration	1 , 36
<i>Buchholz</i> , Zum Prozentbegriff	2 , 90
<i>Buchholz</i> , Mehr bekommt man billiger	5 , 224
<i>Buth</i> , Wie groß ist ein Atom ?	1 , 18
<i>Darvasi</i> , Über den verallgemeinerten Höhensatz	1 , 24
<i>Dobner</i> , Rechnen mit Ungleichungen	1 , 22
<i>Fegert</i> , Ein Modell zu „Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner“ aus dem Erfahrungsbereich der Schüler	IV
<i>Floderer</i> , s. <i>Schneider / Floderer</i>	
<i>Floderer / Schneider</i> , Teilbarkeitsregeln im Sechssersystem	4 , 153
<i>Furdek</i> , Eine Anmerkung zur Farbe meines Hutes	5 , 220
<i>Gawlick</i> , Mit <i>O. Schmid</i> zu hyperelliptischen Kurven	5 , 222
<i>Geisreither</i> , Krümmung von Funktionsgraphen	6 , 268
<i>Göbels</i> , Mathematische Analyse des Cost-Average-Effekts	5 , 204
<i>Gorenflo</i> , Zackenquadrate	1 , 6
<i>Gorenflo</i> , Pentominofiguren aus 11 Steinen II	6 , 280
<i>Gorenflo</i> , Pentomino-Hohlquadruplikationen	6 , 288
<i>Gronau / Sewerin</i> , Die XLIV. Internationale Mathematik- Olympiade	1 , 35
<i>Grün</i> , Fibonacci-verwandte Zahlenreihen	6 , 255
<i>Guggenberger</i> u.a., Zur Pflasterung von Quadraten mit L-förmigen Fliesen	5 , 208
<i>Humenberger</i> , Die extremale Kolbengeschwindigkeit bei einem Kurbelgetriebe	3 , 115
<i>Humenberger</i> , Erwartungswerte und Gewinnwahrscheinlich- keiten bei einem Würfelbudenspiel	6 , 260
<i>Jäger</i> , Pythagoräische Tupel	1 , 14
<i>Kientle</i> , Verallgemeinerung des <i>Pythagoras</i> -Satztripels	6 , 281
<i>Klement</i> , Ein Weg zur natürlichen Exponentialfunktion	1 , 9
<i>Köhler</i> , In der Mitte wird die Mitte erreicht – was denn sonst? ..	4 , 178

<i>Konwallin</i> , Konstruktion pythagoräischer <i>n</i> -Tupel mittels <i>Fibonacci</i> -Zahlen	1 , 32
<i>Koth / Grosser</i> , Stufenparallelogramme aus 12 Pentominos	5 , 212
<i>Kroll</i> , Eine weitere Lösung des Berührkreisproblems von <i>Caspar</i> mittels Kreisspiegelung	1 , 31
<i>Lanyi</i> , Das brasilianische Vestibular	5 , 214
<i>Leneke / Stankewitz</i> , Rund um einen Park – Aufgabenvariationen in Klasse 7	5 , 193
<i>Moos</i> , Tägliche Übungen im Mathematikunterricht	1 , 7
<i>Nieger</i> , Z-Vektoren	2 , 88
<i>Oldenburg</i> , Unfertige Mathematik – ein Anfang mit Ziel, aber ohne Ende (1): - mit <i>q</i>	4 , 172
<i>Oldenburg</i> , Unfertige Mathematik (2): ... mit Pentium-Prozessor und dem TI 82	5 , 227
<i>Oldenburg</i> , Unfertige Mathematik (3): ... mit Flachbandkabeln	6 , 279
<i>Quillmann / Walser</i> , Näherungsformeln zur Abschätzung des Umfangs gestreckter Ellipsen	6 , 278
<i>Pickert</i> , Es geht auch einfacher	3 , 125
<i>Pickert</i> , Eine Vereinfachung	3 , 125
<i>Pickert</i> , Entdecken und Beweisen bei <i>Farey</i> -Folgen	4 , 161
<i>Pickert</i> , s. <i>Thun-Rung</i>	
<i>Pickert</i> , Der weggelassene Allquantor und die Folgen	5 , 222
<i>Pickert</i> , Thaleskreis, Mittelsenkrechte und Mittendreieck	6 , 277
<i>Ramcke</i> , „Nim“-Spiel in mehreren Haufen	3 , 122
<i>Rathgeber</i> , Zur mathematischen Beschreibung von Projekten ...	1 , 20
<i>Rathgeber</i> , Informationsvermittlung in modernen Datennetzen	4 , 185
<i>Rathgeber</i> , Licht im Durchgang durch Glasplatten	5 , 219
<i>Rathgeber</i> , Übung zum Erwartungswert	6 , 266
<i>Riede</i> , Extremale Zerlegung eines Dreiecks	4 , 154
<i>Saam</i> , Zur Divergenz der harmonischen Reihe	2 , 86
Korrigenda dazu	IV
<i>Schmidt</i> , Pentagramme und Hexagramme	3 , 107
<i>Schmidt</i> , Schriftliche Abiturprüfung mit PC	4 , 179
<i>Schmitz</i> , Eine mögliche Verallgemeinerung des Satzes des <i>Pythagoras</i>	4 , 173
<i>Schneider / Floderer</i> , Aus wahr wird falsch, aus falsch wird wahr	3 , 125
<i>Schneider</i> , s. <i>Floderer / Schneider</i>	
<i>Schneider</i> , Links und rechts dasselbe tun	4 , 169
<i>Schönwald</i> , Wozu lernt man die <i>p-q</i> -Formel ?	1 , 13
<i>Schönwald</i> , Miniaturen	3 , 101
<i>Schönwald</i> , Wenn man einen Stapel neuer Schulbücher verteilt	4 , 178
<i>Schönwald</i> , Mathematik in Englisch – ein Projekt in Klasse 6 ...	5 , 219
<i>Schönwald</i> , Eine Teilbarkeitsregel für 64?	6 , 288
<i>Schur</i> , Zu: Schleifen erzeugende Funktionen	5 , 221
<i>Schuster</i> , Die <i>Eulersche</i> Zahl <i>e</i>	6 , 250
<i>Stärk</i> , Eine merkwürdige Zahl des Vierecks	1 , 26
<i>Strecker</i> , „Falsche Ansätze“	4 , 145
<i>Strick</i> , 13, 14, 15 und andere ganzzahlige Dreiecke	3 , 97

Strick, Stapeln im Zweiersystem, Wiegen im Dreiersystem 5, 196
Strick, Eine Aufgabensequenz zur Behandlung periodischer
 Dezimalbrüche im Unterricht der Sek I 6, 241
Thiemann, Problematische Schülervorstellungen bei der Multi-
 plikation und Division 1, 1
Thum-Rung, Zur Konstruktion von „einbeschriebenen Rauten“ 5, 199
 Ergänzung von *Pickert*: „Antwort auf 2 Fragen ...“ 5, 200
Urmanin, Zur Abschätzung transzendenter Funktionen 4, 164
Urmanin, Grundbegriffe der Differentialrechnung in der Sek I
 Teil 4: Differentiationsregeln im 10. Schuljahr 6, 246
Vowe, Jass-Turnier 4, 157
Walser, s. *Quillmann / Walser*
Walser, *Pythagoras*, eine archimedische Spirale und eine
 Approximation von π 6, 287
Weber, Eine angemessene Herleitung der Differentiationsregeln 5,
Welke, Zur Lösung der Gleichung $z = i^z$ 5, 225
Wendt, Ist jede kubische Funktion punktsymmetrisch? 3, 114
Woschner, *Kaprekar*-Konstante im Unterricht? 5, 210
Zeitler, Schon wieder eine Dimension 6, 256

PM COMPUTERPRAXIS

Gawlick, Dynamische Konstruierbarkeit des Kreises allein mit
 dem Lineal 3, 126
Göbels, Betrachtungen zu einigen ungelösten Problemen der
 Zahlentheorie 1, 41
 Ergänzende Hinweise 3, 124
Gundlach, Allgemeine lineare Regression mit Computer-
 Algebra-Systemen 2, 72
Hackenber, Maßgeschneiderte *Heron*-Algorithmen 5, 230
Hechinger, Pythagoreische Tripel 2, 66
Herrmann, Einführung in die Intervallrechnung 2, 59
Hohenwarter, Dynamische Mathematik mit GeoGebra 6, 293
Kayser, Funktionsdiskussion mit Derive 2, 63
Kayser, Kreismuster und Winkelfunktionen 6, 289
Kindla, Der Ableitungsbegriff – dynamisch entwickelt mit
 Cabri Geometry 5, 230
Münchenbach, Superhero – Verschachtelte Folgen mit dem
 TI-92+ 6, 296
Oldenburg, Barrieren für die Anwendung von CAS 2, 69
Rathgeber, Zur Gestaltung eines offenen Programmierunter-
 richts 2, 82
Schmid, Verallgemeinerter *Cassinische* Kurve 2, 77
Schmitz, Der Satz des *Pythagoras* als Ausgangspunkt für ein
 weiteres Problem 1, 37
Siller / Fuchs, Modellbilden bei Extremwertaufgaben 2, 49
Strick, Darstellung von Eisenbahn-Fahrplänen im Mathematik-
 unterricht der Klasse 7 2, 54
Strick, Pressemeldungen (12): Ausgleich im Jahr 2087? 5, 226
Strutz, Nullstellen mit Tabellenkalkulation nach dem *Newton*-
 schen Näherungsverfahren 3, 129
Weisenhorn, Die Freilassung mit harmonischer Harmonie 1, 40

PM AUFGABEN

Red., Abiturprüfungsaufgaben vor 30 Jahren 1, 33
 P 1061. Ein mathematisches Problem beim Einfluchten 1, 43
 P 1062. Trigonometrische Ungleichung 2, 91
 P 1063. *Fibonacci*-Folge 3, 132
Red., Abiturprüfungsaufgaben vor 50 Jahren 5, 235

PM KURZPROBLEME

Q 370. Rechtecke aus Tetrominos ? 1, 43
 Q 371. $3 \times$ Pentominos 2, 91
 Q 372. Rechtecke mit 2 pentomino-förmigen Löchern 3, 132
 Q 373. Eine Folge mit Grenzwert $f(\pi)$ 4, 188
 Q 374. Rechtecke mit 3 pentomino-förmigen Löchern 5, 232
 Q 375. Rechtecke mit 4 pentomino-förmigen Löchern 6, 299

PM AUFGABEN MIT LÖSUNGEN

Schwerin, B 19 1, 43
Schwerin, B 20 2, 91
Schwerin, B 21 3, 132
Gorenflo, Ergänzung zu „Pentominofiguren“ (1998) 3, 133
Fegert, A 751 – 754 Bundeswettbewerb Mathematik 2003 -
 2. Runde 3, 134
Sewerin, Lösungen zu den Aufgaben der 44. IMO 2003 3, 138
Gorenflo, Doppelt-achsensymmetrische Triminofigur 4, 152
Schwerin, B 22 4, 188
Gorenflo, Tetrominos 4-fach genommen 5, 198
Gorenflo, Modifizierte Pentomino-Verdoppelungen II 5, 221
Schwerin, B 23 5, 232
Schwerin, B 24 6, 299

PM NEUE BÜCHER

NEUERSCHEINUNGEN 2, 92; 4, 189; 6,
 300
Abele / Mohry, Power Learning Mathematik, 6. Kl. bzw. 7. Kl.
 (*Stein*) 3, 141
Bathe, Internet im Unterricht – Das Praxisbuch (*Heide*) 5, 235
Beutler/Kansok, Das JavaScript Codebook (*Weller*) 5, 236
Büttmeyer, Philosophie der Mathematik (*Stein*) 5, 234
Burkard u.a., Starke Schüler – gute Schulen (*Stein*) 5, 235
Curdes u.a., Mathematikstudentinnen und –studenten – Studien-
 erfahrungen und Zukunftsvorstellungen (*Prediger*) 5, 236
Eckelt, Mathematikunterricht in der Sek. I ... aus der Welt der
 Jugendlichen (*Stein*) 5, 234
Goll u.a., Java als erste Programmiersprache – Java 2 Platt-
 form (*Heide*) 5, 235
Günther, PHP – Ein praktischer Einstieg (*Heide*) 5, 236
Hanisch, Go To C# (*Heide*) 5, 236
Hechinger/Hild, Top im Abi Mathematik (*Pohlmann*) 5, 234
Heinle / Pena, Webdesign mit JavaScript (*Heide*) 5, 237
Hellige, Geschichten der Informatik. Visionen, Paradigmen, Leit-
 motive (*Heide*) 5, 236
Hemme, Die Quadrate des Teufels. 112 mathematische Rätsel
 mit ausführlichen Lösungen (*Stein*) 5, 234
Hußmann, Mathematik entdecken und erforschen (*Weller*) 3, 140
Irl, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (*Weber*) 6, 301
Kasten, Weiblich – Männlich (*Stein*) 6, 301
Köppen / Stoye, Vorstellungen entwickeln (Variablen und Glei-
 chungen) (*Pohlmann*) 4, 190
Köppen / Stoye, Eindeutige Zuordnungen (*König*) 6, 301
Kradolfer/Gubler, Funktionen und ihre Anwendungen (*Weber*) 5, 234
Kreusch, Frau Dr.R.Übe-Zahls Rechenblätter zum Kopfrechnen
 (*Kappes*) 6, 301
Lehmann, Konezptionelle Überlegungen zur Einbeziehung infor-
 matischer Inhalte und Methoden beim Computereinsatz im
 Mathematikunterricht der Sek. 2 (*Weller*) 5, 236
Leuders (Hrsg.), Mathematik-Didaktik (*Weller*) 3, 140
Linneweh, Stresskompetenz. Der erfolgreiche Umgang mit
 Belastungssituationen in Beruf und Alltag (*Stein*) 5, 235
Luderer, Starthilfe Finanzmathematik (*Stein*) 6, 301
Pesch, Schlüsseltechnologie Mathematik (*Hase*) 6, 300
Polster, WinFunktion: Mathematik PLUS (*Heide*) 3, 141
Rottach/Groß, XML kompakt: die wichtigsten Standards
 (*Weller*) 6, 301
Schlotke/Schmidt, Stationenlernen „Rund um das Pyramiden-
 volumen“ (*Kappes*) 5, 234
Schmidt, Prof.Dr. Rainer Tsufall: Die Würfel sind gefallen
 (*Kappes*) 3, 141
Sonar, Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik.
 Eine Einführung für Lehramtsstudenten, Lehrer und Schüler
 (*Weller*) 5, 237
Steiner, Lernen als Abenteuer (*Hase*) 6, 301
Wong / Kirchgraber u.a., Differenzieren – Do it yourself
 (*Prediger*) 4, 190

Zuber, HTML 4.0 in der Schule: Arbeitsbuch (Heide) 5, 236
 Zuber, XHTML + CSS. Internet next Generation (Weller) 5, 237

PM BERICHTE & MITTEILUNGEN

Termine • Forum für Begabungsförderung in Mathematik • RAAbits Mathematik (36) • Neuer Mathe-Helfer • Derive 6.0 • Star Office 7
 • pdf-Office 1.2 • Netzwerktechnik • Mediendatenbank • Ökibase
 Umweltatlas 6.0 • Fahrrad-Verkehrsplan 1, 44
 GIMPS findet die 40. Mersenne-Primzahl • RAAbits Mathematik (37)
 • EMANI – eArchivierungsinitiative für Mathematik • Stark-Loseblatt-Sammlungen jetzt online • Neues vom T3-Projekt • Internetportal der amtlichen Statistik eröffnet • Scientific Workplace u.a. • www.Mathe-plus.de
 • Neue Ausstellungsbereiche im HNF • CD-Recycling • Deutschland – Land der Vereine • Glosse: Alles reine Fiktion? 2, 92
 Neues vom PC-Wächter • www.Cornelsen-Teachweb.de 3, 141
 Termine: MNU-Herbsttagungen, 34. Jahrestagung der GI, Lehrerakademie Bremen • RAAbits Mathematik (38) • Schulbuchausgaben 4, 190
 MO – Mathematik-Olympiade • Frankfurter Buchmesse • RAA-bits Mathematik (39) • ZfDN • findmybook.de 5, 237
 13. Learntec • didacta • GDM-Tagung • CeBIT 2005 • MNU-Kongress
 • Steine, Fliesen, Parkette • RAAbits Mathematik • Eins plus • Neue Medien im Mathematikunterricht • Internetplattform für Referendare
 • Zum Neuen Jahr 6, 302

Ein Modell zu „Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner“ aus dem Erfahrungsbereich der Schüler

Hans G. Schönwald beschreibt in [1] die Rechenoperation $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ und stellt durch Nennung einiger Beispiele fest, dass diese Rechenoperation durchaus sinnvolle Modelle beschreibt.

Dabei fehlt m.E. der Hinweis auf das den Schülern ständig präsente Beispiel, nämlich der Bewertung einer Leistungskontrolle mit n Aufgaben: Hat Schüler in Aufgabe i ($i = 1, 2, \dots, n$) a_i von maximal b_i möglichen Bewertungseinheiten erzielt, so wird der Bruchteil der für die Aufgabe i erhaltenen Bewertungseinheiten durch den Bruch $\frac{a_i}{b_i}$ beschrieben; die Gesamtbewertung der Arbeit wird nach dem Wert von $\frac{a_1}{b_1} \oplus \frac{a_2}{b_2} \oplus \dots \oplus \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sum a_i}{\sum b_i}$ festgesetzt.

Auch ohne Mathematik kann man sich überlegen, dass dieser so gewonnene Zahlenwert einen Mittelwert der Brüche $\frac{a_i}{b_i}$ beschreiben muss. Tatsächlich folgt aus der auch für Schüler nachvollziehbaren Umformung $\frac{\sum a_i}{\sum b_i} = \frac{\sum b_i \frac{a_i}{b_i}}{\sum b_i}$, dass hier das gewichtete arithmetische Mittel aus den Brüchen $\frac{a_i}{b_i}$ gebildet wird,

wobei jeder Bruch das Gewicht erhält, das seinem Nenner entspricht – noch ein Beispiel dafür, dass das Kürzen eines Bruches zu einem neuen Bruch führt, der zwar den gleichen Wert hat, aber doch verschieden vom ursprünglichen Bruch ist!

[1] Hans G. Schönwald: Miniaturen, Kap. 6: „Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner“. PM 46 (2004) S. 103.

StD Karl Fegert,
 Lessing-Gymnasium Neu-Ulm, 89233 Neu-Ulm.

PM Arbeitsblätter / Kopiervorlagen

Flade, Übung macht den Meister 15/6 und 16/6 1, 46
 Furdek, Fehler in der Prozentrechnung I 1, 48
 Flade, Übung macht den Meister 17/6 und 18/6 2, 94
 Furdek, Fehler in der Prozentrechnung II 2, 96
 Flade, Übung macht den Meister 19/6 und 20/6 3, 142
 Pohlmann, Quadratwurzel-Funktionen 3, 144
 Kreuzsch, Winkel in Vierecken 4, 192
 Furdek, Fehler bei reellen Zahlen I 5, 238
 Furdek, Fehler in der Dreisatzrechnung I 6, 304

Errata

- S. 6 li. Sp. über Fig. 2: „Aus Fig. 2 lesen wir ab: $z(4) = 4^2 + 3^2$ (statt: $42 + 32$).“
 S. 20 Beitrag „Rathgeber“, re. Sp., 7. Zeile: Anlehnung (statt: Ablehnung)
 S. 19 li. Sp. 8. Zeile von unten: $\sum_{k=1}^{\infty} \dots = \frac{1}{(s-1)s!}$
 S. 22 re. Sp., 11. Zeile: $*$ \in { ... } (\in statt $=$)
 S. 87 Korrigenda zu Abschnitt 3 im folgenden.
 S. 161 re. Sp., Zeile vor (3): Verweis auf (2) (statt 2’)
 S. 162 li. Sp., 2. Zeile: Verweis auf (2’) (statt 1’); in (5): \geq (statt \leq)
 S. 198 Beitrag Tetrominos: 4. Zeile: $4 \cdot 5 = 20$ (statt: $4 \cdot 6 = 24$)
 S. 200 li. Sp. 14. Zeile v.u.: $2x \parallel$ statt $||$
 S. 225 Es handelt sich um den 2. Beitrag dazu in PM (statt 1)

Korrigenda zu „Zur Divergenz der harmonischen Reihe“

Meinem Aufsatz „Zur Divergenz der harmonischen Reihe“ in PM 2/46 (2004) 86-88 sind eine Korrektur und eine Ergänzung hinzuzufügen:

1. Dem aufmerksamen Leser ist sicherlich aufgefallen, dass im Abschnitt 3 „Produkte und Summen“ an zwei Stellen das Summen- und das Produktzeichen verwechselt worden ist. Richtig ist:

(3) Ist $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$ divergent, so divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Es gilt sogar strenge Äquivalenz:

(4) $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

2. Ich danke Herrn Prof. Dr. Harry Poppe, Rostock, für den Hinweis auf eine Lücke im indirekten Beweis. Für die Stichhaltigkeit der Argumentation ist eine Überlegung wesentlich, die ich nicht explizit erwähnt hatte und die ich nun nachtragen möchte:

Setzt man

$$U = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \quad \text{und} \quad G = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

und außerdem für die Teilsummen der jeweils n ersten Summanden dieser Reihen U_n bzw. G_n , so folgt aus $U_n > G_n$ unter der Annahme, beide Grenzwerte seien endlich, die Ungleichung $U > G$ erst, wenn man zusätzlich ins Feld führt, dass die Differenzfolge $U_n - G_n$ gegen einen von 0 verschiedenen Grenzwert konvergiert. Sie ist monoton wachsend und es gilt: $U_n - G_n > U_1 - G_1 = \frac{1}{2}$. Dann folgt mit $S = U + G$ aus der Annahme $S < \infty$ zunächst $U > G$ und wegen $G = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots) = \frac{1}{2}S$ tatsächlich der behauptete Widerspruch: $G < U = S - G = 2G - G = G$.

Daraus folgt, dass S keinen endlichen Wert haben kann.

Prof. Dr. Armin Saam, Nelkenweg 4, 56220 Kettig,
 E-Mail: saam@fh-koblenz.de

Kurzfassungen Heft 1

Problematische Schülervorstellungen bei der PM 46 (2004) 1 *K. Thiemann*

Multiplikation vergrößert stets; Division verkleinert stets; Man kann keine kleinere Zahl durch eine größere dividieren. Diese Vorstellungen über die Wirkung von Multiplikation und Division sind empirischen Befunden zu Folge weit verbreitet. Sie entwickeln sich in frühen (Schul)Jahren im Umgang mit natürlichen Zahlen und führen in der Dezimalbruchrechnung zu typischen Schülerfehlern. Geeignete unterrichtliche Maßnahmen sollen diese problematischen Vorstellungen beheben bzw. ihnen vorbeugen.

Tägliche Übungen im Mathematikunterricht PM 46 (2004) 7 *S. Moos*

Der Artikel zeigt Möglichkeiten auf, im Rahmen von täglichen Übungen Schülerinnen und Schüler zum selbständigen Aufarbeiten von Wissenslücken zu motivieren. Dabei wird ein Verfahren vorgestellt, das auf nahezu allen Gebieten der Schulmathematik anwendbar ist und auch auf andere Fächer übertragen werden könnte.

Ein Weg zur natürlichen Exponentialfunktion PM 46 (2004) 9 *H. Klement*

Ausgehend von Wachstums- und Zerfallsprozessen, bei denen die Änderungsgeschwindigkeit zum jeweiligen Bestand proportional ist, wird in einem genetischen Vorgehen \exp als nichttriviale Lösung der Differentialgleichung $f' = f$ konstruiert, bis zu numerischen Werten untersucht und als Exponentialfunktion erkannt. Eine naheliegende Intervallschachtelung erfasst die Eulersche Zahl $e := \exp(1)$ und erweist sie als irrational.

Pythagoräische Tupel PM 46 (2004) 14 *J. Jäger*

Pythagoräische Tripel und ihre Klassifikation stellen ein vielschichtiges und anregendes Kapitel der elementaren Zahlentheorie dar. In dem Beitrag wird eine Verallgemeinerung zu pythagoräischen n -Tupeln diskutiert. Es werden zwei Kriterien zur Klassifikation dieser Tupel entwickelt, die die bekannten Kriterien für Tripel und die Konstruktion von pythagoräischen n -Tupeln erlauben.

Rechnen mit Ungleichungen PM 46 (2004) 22 *H.-J. Dobner*

In viele praktische Rechnungen gehen, bedingt durch Rundungs- oder Messfehler, Daten ein, die nicht exakt bekannt sind. In diesem Aufsatz wird aufgezeigt, dass Intervallrechnung ein elegantes Werkzeug für das praktische Arbeiten mit Ungleichungen, gerundeten Zahlen, Fehlerschranken oder unscharfen Mengen ist. Mit Hilfe der Intervallrechnung wird ein einfacher Kalkül für das Rechnen mit Ungleichungen vorgestellt sowie daraus resultierende algebraische und analytische Eigenschaften untersucht. Es wird weiter nachgewiesen, dass dieses Thema im Rahmen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufen I und II behandelt werden und somit Schülern der Umgang mit Ungleichungen und algebraischen Strukturen erleichtert werden kann.

Zur mathematischen Beschreibung PM 46 (2004) 20 **von Projekten**

C. Rathgeber

Gezeigt wird, dass charakteristische Projektgrößen mathematisch erfasst werden können. Zum Beispiel kann der kommunikative Aufwand in Projekten berechnet werden. Diese Zusammenhänge können auch durch Simulationen dargestellt werden.

Eine merkwürdige Zahl des Vierecks PM 46 (2004) 26 *R. Stärk*

Wenn man bei einem Viereck und seinem Mittelsenkrechtenviereck die Teildreiecksinhalte vergleicht, stößt man auf eine zum Viereck gehörende, interessante Zahl. Dass diese Zahl noch auf mannigfaltige Weise beim Viereck in Erscheinung tritt und in den verschiedensten Zusammenhängen eine Rolle spielt, ist das überraschende Resultat dieser Arbeit, welche auch darauf hinweisen will, dass die Elementargeometrie in unserer Zeit dank moderner Computerunterstützung einen neuen Aufschwung nehmen kann.

2004 – vorletzte Spielerei PM 46 (2004) 34

K. Zita

Arithmetik / Zahlentheorie / Knocheleien um die neue Jahreszahl.

Die XLIV. Internationale Mathematik- PM 46 (2004) 35 **Olympiade**

H.-D. Gronau / H. Sewerin

Bericht über die Austragung des Wettbewerbs 2003 in Tokio. Mit Länderübersicht der Spitzengruppe (die ersten 20) und den Texten der 6 Wettbewerbs-Aufgaben.

Der Satz des Pythagoras als Ausgangspunkt PM 46 (2004) 37 **für ein weiteres Problem**

M. Schmitz

Der Satz des *Pythagoras* als Ausgangspunkt für ein weiteres Problem: Im Artikel werden Anregungen gegeben, sich mit altbekannten Themen unter Verwendung von dynamischer Geometrie bzw. Computeralgebrasystemen neu zu befassen. Hier stehen der Satz des *Pythagoras* bzw. der des *Thales* im Mittelpunkt. Es wird nach der Menge der Punkte C in der Ebene gefragt, für die $|AC|^2 + |BC|^2 = k_0 = \text{const.}$ gilt, wenn A und B zwei feste, voneinander verschiedene Punkte sind. Die Aufgabenstellung wird mit DGS und CAS erkundet, die Vermutung anschließend „per Hand“ bewiesen.

Betrachtungen zu einigen ungelösten PM 46 (2004) 41 **Problemen der Zahlentheorie**

W. Göbels

Der Beweis der *Fermatschen* Vermutung durch den britischen Mathematiker *Andrew Wiles* belebte die Diskussion über ungelöste mathematische Probleme. Einige unbewiesene Vermutungen aus der Zahlentheorie betreffen vollkommene, defiziente und abundante Zahlen sowie Primzahlzwillinge. Computerunterstützte Analysen ermöglichen Ansätze für tiefere Erörterungen und Diskussionen zu dieser Thematik.

Kurzfassungen Heft 2

Modellbilden bei Extremwertaufgaben

PM 46 (2004) 49

H.-S. Siller und K. Fuchs

In diesem Artikel wird die fundamentale Idee der Modellbildung anhand von Extremwertaufgaben vorgestellt. Anhand ausgesuchter Beispiele werden die Schritte des Modellbildungsprozesses dargestellt, ausgeführt und erklärt. Auf den besonders wichtigen Punkt der Interpretation der Lösungen wird hingewiesen. Weiters findet man Anmerkungen zu wichtigen Tatsachen, die man beachten sollte, wenn man die Extremwertaufgaben mit einem CAS berechnet. Die Beispiele wurden mit Derive durchgerechnet. Die Aufgaben können leicht in andere Systeme übertragen werden.

Darstellung von Eisenbahn-Fahrplänen im Mathematikunterricht der Klasse 7

PM 46 (2004) 54

H.K. Strick

Die Umsetzung von Eisenbahn-Fahrplänen in eine grafische Darstellungsform eignet sich als Einführungsbeispiel für das Thema „Zuordnungen“ in Jahrgangsstufe 7. Die Behandlung bietet gute Möglichkeiten der fächerverbindenden Zusammenarbeit mit dem Fach Geographie. Die Schülerinnen und Schülern müssen z. B. überlegen, wie am besten Tabellen und Grafiken anzulegen sind; bei der Bestimmung von Durchschnittsgeschwindigkeiten beschäftigen sie sich damit, welche Rechengenauigkeit angemessen ist. Unter Verwendung von Tabellenkalkulation können die notwendigen Schritte abschließend automatisiert werden. In Jahrgangsstufe 8 kann dann das Thema wieder aufgegriffen werden, wenn Geradengleichungen aufgestellt und Schnittpunkte von Geraden bestimmt werden können.

Einführung in die Intervallrechnung

PM 46 (2004) 59

D. Herrmann

Bei vielen Anwendungen treten Intervalle auf, sei es bei Messwerten, maschinellen Ergebnissen, Konfidenz-Intervallen und Ähnlichem. Für die Intervall-Arithmetik existieren spezielle Compiler, z.B. der Pascal-SC-Compiler der Universität Karlsruhe. Für den Informatik-Unterricht wird hier eine Klasse Intervall vorgestellt, die alle Grundrechenarten für endliche, abgeschlossene Intervalle implementiert. Es wird die Programmiersprache C++ gewählt, da diese – im Gegensatz zur Programmiersprache Java – das Intervallrechnen mit den üblichen Rechenoperatoren {+, -, *, /} erlaubt. Zur Anwendung werden drei typische Beispiele wie Fehlerrechnung, Intervallhalbierung und die Newton-Iteration gegeben.

Kurvendiskussion mit DERIVE - Datensatz und Graf auf Tastendruck

PM 46 (2004) 63

H. J. Kayser

Es wird gezeigt, wie man unter Verwendung einer für das Computeralgebra-system DERIVE programmierten Datei die lästige Routineaufgabe „Funktionsdiskussion“ an den Computer delegieren kann, um so Zeit und Arbeitskraft für Wichtigeres freizusetzen.

Die direkt einsetzbare DERIVE-Datei (Funk_Ut) mit den Funktionen FD (zur Durchführung von Funktionsdiskussionen) und FG (zum Zeichnen von Funktionsgrafiken mit markierten besonderen Punkten) und die am Ende des Beitrags ausgedruckte Datei FUNKDISK können vom Aulis-Server heruntergeladen werden.

Pythagoreische Tripel

PM 46 (2004) 66

T. Hechinger

Der Beitrag entwickelt durch eine Kombination geometrischer, algebraischer und zahlentheoretischer Argumente die *indischen Formeln* für die pythagoreischen Tripel aus einer bekannten rationalen Parameterdarstellung des Einheitskreises.

Ein beigegebenes Pascal-Programm schließt den Beitrag ab.

Barrieren für die Anwendung von CAS

PM 46 (2004) 69

R. Oldenburg

Misserfolge können sich bei der Arbeit mit Computeralgebra-Systemen leicht einstellen. Der Artikel enthält eine Analyse von Problemstellen und will dadurch das Bewusstsein für Fehlermöglichkeiten schärfen. Die in Maple dargestellten Beispiele sind größtenteils auf andere CAS übertragbar.

Allgemeine lineare Regression mit Computer-Algebra-Systemen

PM 46 (2004) 72

A. Gundlach

Es geht um die Lösung von Ausgleichsaufgaben durch eine Näherung von Linearkombinationen gegebener Funktionen. Dabei wird gezeigt, dass die Lösung durchaus mit einfachen algebraischen Mitteln der Schulmathematik gefunden werden kann. Die Aktualität dieser Problematik für den Unterricht begründet sich unter anderem auch in der Verfügbarkeit von Computer-Algebra-Systemen. Beispiele für den TI-92 und eine interaktive Internetseite werden für Anwender bereitgestellt.

Verallgemeinerte Cassinischen Kurven

PM 46 (2004) 77

O. Schmid

Die Menge aller Punkte einer Ebene, deren Entfernungen von n festen Punkten dieser Ebene *konstantes Produkt* besitzen, wird als *Cassinische Kurve* n -ten Grades definiert. Die verallgemeinerten *Cassinischen Kurven* werden in der *Gaußschen Ebene* durch eine Gleichung der Form

$|z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0| = k$ beschrieben. Diese neuartigen Kurven überraschen - wie mehrere Beispiele zeigen - durch ihren Formenreichtum.

Zur Gestaltung eines offenen Programmierunterrichts

PM 46 (2004) 82

C. Rathgeber

Offene Unterrichtsgestaltungen können mit Erfolg im Rahmen der Binnendifferenzierung eines Programmierunterrichts eingesetzt werden. Ein möglicher (alltagstauglicher) Gestaltungsrahmen und eine konkrete Vorgehensweisen werden vorgestellt.

Generieren großer magischer Quadrate aus bekannten kleineren

PM 46 (2004) 85

H. Brockmeyer

Baut man in ein magisches Quadrat mit 3 Gliedern pro Zeile und Spalte dieses Quadrat wieder ein, so erhält man ein magisches Quadrat mit neun Gliedern pro Zeile und Spalte. In gleicher Weise kann das mit magischen Quadraten, die vier, fünf usw. Glieder pro Zeile und Spalte haben, geschehen. Den Kombinationsmöglichkeiten sind keine Grenzen gesetzt.

Zur Divergenz der harmonischen Reihe

PM 46 (2004) 86

A. Saam

Wie kann man jemandem von der Divergenz der harmonischen Reihe überzeugen, der nur geringe Vorkenntnisse in Mathematik besitzt? Dieser Frage soll anhand von vier Beweismethoden, die vergleichend einander gegenübergestellt werden, nachgegangen werden. Es bleibt am Ende die Frage offen, weshalb der einfachste – nämlich ein indirekter – Beweis für die Schüler doch nicht so einfach ist, wie es zunächst scheint.

Z-Vektoren

PM 46 (2004) 88

M. Nieger

Aufgaben der Analytischen Geometrie wirken schülerfreundlicher, wenn nicht nur die Koordinaten der benutzten Vektoren, sondern auch ihre Beträge ganzzahlig sind (*Z-Vektoren*!). Es wird ein Verfahren angegeben, mit dem man leicht orthogonale, rechtshändige Basen aus solchen *Z-Vektoren* erzeugen kann. Die nötige Rechenarbeit erleichtert ein per download erhältliches Programm: ihre nächste derartige Aufgabe kann so frei von Wurzeln formuliert werden.

Kurzfassungen Heft 3

13, 14, 15 und andere ganzzahlige Dreiecke PM 46 (2004) 97

H.K. Strick

Gibt es Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, bei denen auch die Fläche ein ganzzahliges Maß hat? Offensichtlich sind diese Eigenschaften für alle rechtwinkligen, pythagoräischen Dreiecke erfüllt, da mindestens die Länge einer Kathete geradzahlig ist.

Auch achsensymmetrische Dreiecke, die sich in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen lassen, können die Bedingungen erfüllen, sofern Höhe, halbe Basis und Schenkel ein pythagoräisches Zahlentripel bilden.

Pythagoräische Zahlentripel weisen also den Weg hin zu Dreiecken, die nicht achsensymmetrisch, aber dennoch ganzzahlig sind. Solche ganzzahligen Dreiecke werden aufgespürt und bei der Suche noch weitere Entdeckungen gemacht.

Miniaturen PM 46 (2004) 101

H.G. Schönwald

1. Wozu ist die „1“ da ?
2. Eintel
3. Ein ansprechender Beweis für die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung
4. Muss man beim Kürzen die „1“ hinschreiben ?
5. Masse statt Gewicht
6. Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner
7. Brüche & Quotienten
8. Ein problemgeleiteter Zugang zu den binomischen Formeln
9. Warum darf man keine Logarithmen von negativen Zahlen bilden ?
10. Warum gibt es keinen Skalarquotienten ?

Pentagramme und Hexagramme PM 46 (2004) 107

W.H. Schmidt

Die Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks erzeugen im Innern der Figur ein (kleineres) regelmäßiges Fünfeck. Es wird untersucht, wie sich die Flächeninhalte der beiden Fünfecke zueinander verhalten. Dann werden analoge Untersuchungen für regelmäßige Sechsecke, Siebenecke und Achtecke durchgeführt. Benutzt werden nur einfache Beziehungen bei trigonometrischen Funktionen, die Lösungsformeln für quadratische Gleichungen und Formeln für Flächeninhalte von Dreiecken. Für numerische Rechnungen kann ein Taschenrechner benutzt werden. Die betrachteten Figuren treten in der Natur und in der Architektur wirklich auf!

Über die Anzahl gleicher Gewinnzahlen im Lotto in Deutschland und Österreich PM 46 (2004) 112

K. Bosch

Am Wochenende 27/28.9.2003 stimmten in den beiden Gewinnreihen in Deutschland und Österreich 5 Gewinnzahlen überein. Angeregt durch dieses in der Presse als Sensation dargestellte Ereignis werden die von der Lottoreihe aus Deutschland abhängigen bedingten sowie die absoluten Wahrscheinlichkeiten für k gleiche Gewinnzahlen in beiden Ziehungen berechnet. Dabei ist zu beachten, dass in Österreich „6 aus 45“ gespielt wird. Die Ergebnisse werden schließlich auf Ziehungen in Deutschland übertragen.

Ist jede kubische Funktion punktsymmetrisch? PM 46 (2004) 114

P. Wendt

Im Beitrag wird eine Methode vorgestellt, die Punktsymmetrieeigenschaft kubischer Funktionen durch Verschieben eines zum Ursprung punktsymmetrischen Graphen einer kubischen Funktion zu verstehen. Der Gebrauch von grafikfähigen Taschenrechnern kann dabei hilfreich sein.

Die extremale Kolbengeschwindigkeit bei einem Kurbelgetriebe PM 46 (2004) 115

H. Humenberger

Anhand einer Extremwertaufgabe bei einem einfachen Kurbelgetriebe soll exemplarisch gezeigt werden, dass bei vielen Optimierungsaufgaben durch Differentialrechnung allein tieferes Verständnis und adäquate Einsichten kaum zu generieren sind. Heuristische Vorüberlegungen, kinematisch-geometrische Exaktifizierungen und analytische Bestätigung der gewonnen Erkenntnisse stehen dabei im Mittelpunkt.

Dynamische Konstruierbarkeit des Kreises allein mit dem Lineal PM 46 (2004) 126

T. Gawlick

Es wird auf geometrische wie auf algebraische Weise gezeigt, dass der Kreis als dynamisches Objekt alleine mit dem Lineal konstruierbar ist. Das Lineal wird dabei nur zum Verbinden bereits konstruierter Punkte benutzt. So kann man einen allgemeinen Kreispunkt konstruieren, indem man entweder einen rationale Parameterdarstellung seiner Koordinaten in eine Linealkonstruktion übersetzt oder Pascals „hexagramma mysticum“ verwendet. Beide Wege sind auf andere Kurven verallgemeinerbar und geben Anlass, den dynamischen Konstruktionsbegriff grundlegend zu überdenken.

Nullstellen mit Tabellenkalkulation nach dem Newtonschen Näherungsverfahren PM 46 (2004) 129

C. Strutz

Der Beitrag zeigt, dass jeder Anwender eines zeitgemäßen Personal Computers, der über ein Programm mit Tabellenkalkulation (z.B. LOTUS 1-2-3™, EXCEL™, WORKS™) verfügt, ohne Programmier- und Zeitaufwand und ohne Horner-Schema mit höchster Präzision das Newtonsche Verfahren der Nullstellen-Approximation einsetzen kann, wie dies früher nur einem Rechenzentrum vorbehalten war.

Bundeswettbewerb Mathematik 2002 2. Runde: Aufgaben und Lösungen PM 46 (2004) 134

K. Fegert

Die Aufgaben der zweiten Runde des diesjährigen Bundeswettbewerbs Mathematik werden vorgestellt. Zusätzlich zu den Lösungen werden Hinweise auf typische Fehler gegeben und Möglichkeiten zum Einsatz im Mathematikunterricht aufgezeigt.

Lösungen zu den Aufgaben der 44. IMO 2003 PM 46 (2004) 138

H. Sewerin

Es werden Lösungen der deutschen Teilnehmer der 44. Internationalen Mathematik-Olympiade (Tokio/Japan) abgedruckt. Die zugehörigen Aufgabentexte findet man in PM 46/1 (2004) 35f.

Kurzfassungen Heft 4

„Falsche Ansätze“

PM 46 (2004) 145

C. Strecker

Themen aus der Mathematikgeschichte eignen sich oft zur zusammenfassenden Rückschau auf ein abgeschlossenes Kapitel. Gleichzeitig lassen sich heuristische Strategien vermitteln.

Teilbarkeitsregeln im Sechssystem

PM 46 (2004) 153

M. Floderer / H. Schneider

Regeln für die Teilbarkeit durch 2, 3, 5, 6 und 7 werden für das Sechssystem induktiv erarbeitet und zahlentheoretisch bewiesen. Dann werden diese Regeln auf Stellensysteme mit der Basis b ($b \in \{2, 3, 4, \dots\}$) verallgemeinert.

Extremale Zerlegung eines Dreiecks

PM 46 (2004) 154

H. Riede

3 Punkte auf den Seiten eines Dreiecks bilden ein 'Indreieck', das das Ausgangsdreieck in 4 Teildreiecke zerlegt. Es wird geklärt: Wann genau (!) tritt der Fall ein, dass das Indreieck auf diese Weise

* vier flächen-/umfangsgleiche Dreiecke erzeugt

* von der vieren den kleinsten Inhalt/Umfang hat ?

Jass-Turnier

PM 46 (2004) 157

M. Vowe

Das Kirkman-Schulmädchenproblem und Spielpläne für ein Turnier gehören zu den interessanten kombinatorischen Aufgabenstellungen, die wohl kaum durch Probieren gelöst werden können. Der Beitrag zeigt, wie man mit algebraischen Methoden entsprechende auflösbare Blockpläne für eine Lösung konstruieren kann.

Entdecken und Beweisen bei Farey-Folgen

PM 46 (2004) 161

G. Pickert

Als n -te Farey-Folge F_n wird die aus der Menge der echten Brüche mit Nenner $\leq n$ durch Anordnung der Größe nach entstehende Folge bezeichnet. Man hat also z.B. $F_2 = (1/2)$, $F_3 = (1/3, 1/2, 2/3)$, ...

Der Beitrag regt zu einigen Entdeckungen im Zusammenhang mit diesen Folgen an und beweist sie.

Zur Abschätzung transzendenter Funktionen

PM 46 (2004) 164

Z. Urmanin

Der Beitrag enthält ein recht umfangreiches Aufgabenmaterial mit breit gestreutem Schwierigkeitsgrad für Rechentechniken der Algebra und der Analysis, das die Schüler zu selbständiger Auseinandersetzung mit Abschätzfragen im Bereich der Exponential-, Logarithmus-, Hyperbel- und Areafunktionen anregen und befähigen soll. Es ist vorwiegend für den Analysisunterricht eines Gymnasiums geeignet, kann auch z.B. in Arbeitsgruppen sowie in Klausuren, auch in Abiturprüfungen eingesetzt werden, aber auch im ganzen als eine Einführung in die interessante und wichtige Ungleichungstheorie verstanden werden.

Wachstumsende von Jugendlichen

PM 46 (2004) 170

W. Bayer

Ein Statistik-Projekt, welches von Schülerinnen eigenständig bearbeitet worden ist, wird vorgestellt und zur Nachahmung empfohlen. Ermittelt die durchschnittliche Körpergröße, die heutige Schülerinnen und Schüler zu erwarten haben und der Zeitpunkt des Erreichens.

Die Resultate werden mit denen aus Messungen früherer Jahrgänge verglichen.

Unfertige Mathematik

PM 46 (2004) 172

- ein Anfang mit Ziel, aber ohne Ende

R. Oldenburg

Mathematik sollte nicht nur als Produkt sondern auch als Prozess erlebt werden. In der Artikelserie „Unfertige Mathematik“ sollen deshalb offene Problemstellungen präsentiert werden, die zu eigenen Begriffsbildungen und Erkenntnissen anregen können. Bei diesen Problemen gibt es keine fertige (und perfekte) Lösung im Hintergrund. Es geht um – im besten Sinne des Wortes – unfertige Mathematik.

1) Unfertige Mathematik mit q : Den Grenzprozess in der Definition der Ableitung kann man auch weglassen und erhält trotzdem etwas interessantes, den Differenzenquotienten. Mehr noch, man kann auch andere Differenzenquotienten definieren. Eine Möglichkeit, die q -Ableitung, zeigt eine starke Ähnlichkeit mit der gewöhnlichen Ableitung und ist daher ein fruchtbares Feld für Untersuchungen.

Eine mögliche Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras

PM 46 (2004) 173

M. Schmitz

Eine mögliche Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras: Dieser Artikel nutzt das Ergebnis aus [1] und wendet es auf ein beliebiges Dreieck ABC an. Es ergibt sich dabei eine Beziehung für $|AC|^2 + |BC|^2$, die geometrisch veranschaulicht wird, und die für rechtwinklige Dreiecke (bei C) mit dem Satz des Pythagoras übereinstimmt.

Schriftliche Abiturprüfung mit PC

PM 46 (2004) 179

R. Schmidt

Seit 1997 wurde im Rahmen des Schulversuches „CuMaU“ im Mathematikunterricht ab der Klassenstufe 7 der Computer als Werkzeug genutzt. Zum Einsatz kamen dabei u. a. die Tabellenkalkulation (TK) EXCEL, Dynamische Geometriesoftware (DGS) GeogWin und das Computeralgebrasystem (CAS) Mathcad.

Somit bestand die Möglichkeit und Notwendigkeit gesonderte Aufgaben für die schriftliche Abiturprüfung zu erstellen und diese zu evaluieren.

Nach einleitenden Informationen zu „CuMaU“ werden einige ausgewählte Aufgabenteile der Abiturprüfung 2003 vorgestellt und illustriert. Diese sollen zeigen, dass klassische Inhalte des MaU (inner- und außermathematische Probleme) erhalten bleiben, Mathematik aber auch etwas anders betrieben werden kann. Einerseits könnten „Mathematische Aufsätze“ durch den Einsatz des CAS Mathcad wieder aktuell werden, andererseits sind auch Prüfungsteile ganz ohne Hilfsmittel denkbar.

Informationsvermittlung in modernen Datennetzen

PM 46 (2004) 185

C. Rathgeber

Dargestellt wird, welche Datenübertragungsprinzipien in der modernen Informationstechnik eingesetzt werden. Die Referenzmodelle werden skizziert und die Problematik der Wegesuche und mögliche mathematische Lösungen werden vorgestellt.

Kurzfassungen Heft 5

Rund um einen Park – Aufgabenvariation in Klasse 7 PM 46 (2004) 193

B. Leneke; M. Stankewitz

Aufgaben im Mathematikunterricht zu variieren kann Anliegen in jeder Schulstufe und Schulart sein. Kein Inhalt und keine Methode sind dabei ausgeschlossen. Die Offenheit von Anfang an macht es jedem Lernenden möglich, seiner Individualität (Leistungsvermögen, Interessen) entsprechend den gesamten Prozess eigenverantwortlich und produktiv mitzugestalten. Aufgaben werden nicht nur empfangen, sondern von den Schülerinnen und Schülern selbst initiiert, gestellt und dann auch gelöst. Im Beitrag wird vorgestellt, wie in einer 7. Klasse diese Unterrichtsform sowohl inhaltlich als auch methodisch-organisatorisch gestaltet wurde.

Stapeln im Zweiersystem, Wiegen im Dreiersystem PM 46 (2004) 196

H.K. Strick

In Klassenstufe 5 oder 6 lernen die Kinder, wie man (natürliche) Zahlen in anderen Zahlensystemen darstellt; dabei beschränkt man sich aus Zeitgründen im Allgemeinen auf die Umwandlung von Zahlen aus dem Zehnersystem in das Zweiersystem und umgekehrt. Dies genügt auch, um die Methode der Umwandlung deutlich zu machen, jedoch verpasst man die Chance, eine überraschend einfache Anwendung des Dreiersystems kennen zu lernen. Im Beitrag wird erläutert, was das Wiegen mit der Balkenwaage mit dem Dreiersystem zu tun hat, und außerdem, wie man zur Umwandlung der Zahlen Tabellenkalkulation verwenden kann.

Zur Konstruktion von „einbeschriebenen“ Rauten PM 46 (2004) 199

C. Thum-Rung

Es wird ein Konstruktionsverfahren gezeigt, mit dem sich vier gegebenen Geraden Rauten „einbeschreiben“ lassen.

Antwort auf zwei Fragen zu einbeschriebenen Rauten PM 46 (2004) 202

G. Pickert

Als geometrischer Ort für die Mittelpunkte der einbeschriebenen Rauten ergibt sich im nichtkopunktalen Fall ein Kegelschnitt. Bei kopunktalen Geraden sind alle Rautendiagonalenrichtungen möglich, wenn die Geradenpaare Winkelhalbierendenpaare voneinander sind.

Zum Umgang mit Potenzreihen im Analysis-Grundkurs PM 46 (2004) 201

H. Ahbe

Man kennt die Klage: Anwachsende Stoffmenge bei nur drei Wochenstunden Unterrichtszeit! – Durch einen exemplarischen Umgang mit Potenzreihen wird gezeigt, dass man bei einem Wechsel der üblichen Betrachtungsweise frühzeitig und mit geringem Zeitbedarf wichtige Einsichten vermitteln kann, indem man gewissermaßen das Pferd „von unten“ (Polynomfunktionen) aufzäumt.

Eine angemessene Herleitung der Differentiationsregeln PM 46 (2004) 203

C. Weber

Es wird eine Form der Schreibweise für die Quotientenregel vorgestellt, die die Verwandtschaft von Produkt- und Quotientenregel (Umkehroperation) klarer hervortreten lässt. Mit diesem Ansatz lässt sich die Kette von Herleitungen und Beweisführungen im gymnasialen Unterricht stark vereinfachen bzw. abkürzen - unter Beibehaltung der logischen Stringenz.

Zur Pflasterung von Quadraten mit L-förmigen Fliesen PM 46 (2004) 208

W. Guggenberger u.a.

Lösung eines Pluskurses Mathematik einer Aufgaben aus dem BWM 1981.

Mathematische Analyse des Cost-Average-Effekts PM 46 (2004) 204

W. Göbels

Nach drei Jahren fallender Börsenkurse scheint nun im laufenden Jahr an den Märkten eine Erholungsphase einzusetzen. Wie aber soll sich ein Anleger in Zeiten schwankender Kursverläufe verhalten? Gibt es eine optimale Anlagestrategie, bei der mögliche Verluste minimiert, bzw. Gewinne maximiert werden? Mit Hilfe des sog. Cost-Average-Prinzips erwirbt ein Anleger bei hohen Kursen weniger, bei niedrigen dagegen entsprechend mehr Anteile, die danach im Falle weiterer Kursanstiege höhere Wertzuwächse erzeugen. Die Cost-Average-Vorteile hinsichtlich der Wertentwicklung werden im weiteren Verlauf dieses Beitrags mit Hilfe mathematischer Methoden analysiert.

Kaprekar-Konstante im Unterricht? PM 46 (2004) 210

H. Woschner

Die Entdeckung von D.R. Kaprekar aus dem Jahr 1949 zeigt, dass die vierstelligen natürlichen Zahlen immer noch Überraschungen zu bieten haben. Anhand eines für alle Jahrgangsstufen geeigneten Arbeitsblattes sollen Schüler an das Entdecken besonderer Eigenschaften von vierstelligen natürlichen Zahlen herangeführt und so die Freude an der Mathematik geweckt werden.

Stufenparallelogramme aus zwölf Pentominos PM 46 (2004) 212

M. Koth / N. Grosser

In diesem Beitrag werden Stufenparallelogramm-Formate vorgestellt, die man lückenlos mit den zwölf Pentominos füllen kann. Viele dieser Stufenparallelogramme lassen sich aus zwei kongruenten Teilflächen zusammensetzen bzw. so in zwei Teilflächen zerlegen, dass eine Verwandlung in ein Rechteck, in ein Stufentrapez oder in ein anderes Stufenparallelogrammformat möglich ist.

Das brasilianische Vestibular PM 46 (2004) 214

C. Lanyi

Das dreijährige brasilianische Gymnasium gilt als abgeschlossen, wenn das dritte Jahr erfolgreich bestanden wurde (Conclusão) – eine Reifeprüfung wie in Deutschland gibt es nicht. Dafür verlangt jede Universität eine Aufnahmeprüfung – das Vestibular. Dieser Beitrag gibt einige Beispiele.

Pressemeldungen (12): Ausgleich im Jahr 2087? PM 46 (2004) 226

H.K. Strick

Frauen haben im Mittel geringere Einkünfte als Männer; aber langsam verringert sich der Unterschied. Wann werden die Frauen soviel verdienen wie Männer? Eine Pressemitteilung des Statistischen Bundesamtes und eine Zeitungsmeldung gaben Anlass zu Modellrechnungen.

Maßgeschneiderte Heron-Algorithmen PM 46 (2004) 228

D. Hackenberg

Es wird ein einfaches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von \sqrt{a} und $\sqrt[3]{a}$ aus der allgemeinen binomischen Formel entwickelt. Die Konvergenzgüte richtet sich dabei nach den Wünschen des Anwenders.

Der Ableitungsbegriff PM 46 (2004) 230

R. Kindla

Es wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie mit Hilfe des TI-92 plus (Cabri Geometry, Dat./Matrixeditor, Grafikbildschirm, Rechner) auf recht anschauliche Weise die Steigung der Tangente in einem Punkt $(x; f(x))$ – falls existent – approximiert und berechnet werden kann. Da der mathematische Hintergrund (Tangentensteigung = Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion für $x \rightarrow x_0$ – falls existent) bekannt ist, wird das Augenmerk auf den technischen Aspekt der Veranschaulichung gelegt.

Kurzfassungen Heft 6

Eine Aufgabensequenz zur Behandlung periodischer Dezimalbrüche im Unterricht der Sek I

PM 46 (2004) 241

H.K. Strick

Bei der Umwandlung von Brüchen in Dezimalbrüche stößt man auf das Phänomen der Periodizität des Divisionsalgorithmus; dies ist gewöhnlich Thema in Klassenstufe 6. Woran es liegt, welche Perioden auftreten, bei welchen Nennern diese Perioden wie lang sind, soll durch die im Folgenden dargestellte Unterrichts- / Aufgabensequenz erläutert werden, die in einer Klasse 8 mit Schwerpunktfach Mathematik durchgeführt wurde. Die in dieser Unterrichtsabschnitt vermittelten Erkenntnisse können dazu beitragen, die Einsichten in unser Zahlensystem zu vertiefen.

Polygonalzahlen, die zugleich Quadratzahlen sind

PM 46 (2004) 244

H. Brockmeyer

Die Bildungsgesetze der Polygonalzahlen werden gleich m^2 gesetzt und mit Hilfe eines Computers und eines Suchprogramms werden die Lösungen dieser Gleichungen in natürlichen Zahlen ermittelt. Empirisch gefundene Rekursionsformeln liefern dann beliebig viele Lösungen.

Grundbegriffe der Differentialrechnung in der Sek. I, Teil 4: Differentiationsregeln im 10. Schuljahr

PM 46 (2004) 246

Z. Urmanin

Die in den früheren Beiträgen eingeführten Grundbegriffe der Differentialrechnung für die Sek. I werden präzisiert und an konkreten Beispielen demonstriert. Die Differentiationsregeln lassen sich dann in methodischer Kontinuität – als allgemeine Beispiele – herausarbeiten.

Die Eulersche Zahl e

PM 46 (2004) 250

A. Schuster

Es wird immer wieder gefordert, verschiedene Aspekte eines mathematischen Begriffs im Unterricht aufleuchten zu lassen (etwa Freudenthal 1983). Im Artikel sollen hierzu Anregungen gegeben werden, die im Umfeld der Eulerschen Zahl e angesiedelt sind und die als Ausgangspunkt für die Vergabe von Facharbeiten in der Sekundarstufe II dienen können.

Fibonacci-verwandte Zahlenreihen

PM 46 (2004) 255

D. Grün

Die bekannte Fibonacci-Zahlenreihe (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) kann außer rekursiv auch durch die Formel von Binet berechnet werden. Was aber geschieht, wenn man die Parameter dieser Formel verändert? Es werden einige Beobachtungen zu „Fibonacci-verwandten“ Zahlenreihen und eine Einsatzmöglichkeit zur Berechnung von Wurzeln vorgestellt.

Schon wieder eine Dimension

PM 46 (2004) 256

H. Zeidler

Im Bereich der fraktalen Geometrie gibt es einen ganzen Zoo verschiedener Dimensionen. Anknüpfend an die Selbstähnlichkeitsdimension wird in der vorliegenden Arbeit die Selbstaffinitätsdimension eingeführt und auf zwei Beispiele – den Flächenteppich und das Cantor-Labyrinth – angewandt.

Erwartungswerte und Gewinnwahrscheinlichkeiten bei einem Würfelspiel

PM 46 (2004) 260

H. Humenberger

Es sollen n Würfel geworfen und die Resultate (Augenzahlen) der Größe nach geordnet werden. Im Aufsatz wird einerseits eine Möglichkeit dargelegt, den Erwartungswert des j -besten Resultates von n Würfeln ($1 \leq j \leq n$) zu berechnen; andererseits wird gezeigt, dass beim zugrundeliegenden Würfelbudenspiel durch eine kleine Änderung der Spielregel überraschenderweise (?) nicht mehr der Spielbudenbesitzer, sondern der Spieler im Vorteil ist.

Übung zum Erwartungswert

PM 46 (2004) 266

C. Rathgeber

Für eine einfache elektrische Schaltung (Parallelschaltung von drei Widerständen) wird gezeigt, dass zwei unterschiedliche Erwartungswerte zu bestimmen sind, die beide in Abhängigkeit von Randbedingungen in charakteristischer Weise zur Beschreibung der Schaltung verwendet werden können.

Krümmung von Funktionsgraphen - eine anschauliche Einführung

PM 46 (2004) 268

R. Geisreither

Zunächst wird eine mittels Anschauung gewonnene Definition der Krümmung einer Funktion angegeben, die rasch zu einigen Erkennungsmerkmalen und elementaren Eigenschaften von links- bzw. rechtsgekrümmten Funktionen führt. In einem zweiten Teil wird dann ein anschauliches Maß für die Krümmung eines Funktionsgraphen sowie der zugehörige Krümmungskreis eingeführt

Näherungsformeln zur Abschätzung des Umfangs gestreckter Ellipsen

PM 46 (2004) 278

H. Quillmann / H. Walser

Selbstverständlich sind in der modernen Nachrichten- und Satellitentechnik Näherungsformeln zur Berechnung des Umfangs von Ellipsen ungeeignet. Sie werden aber im Unterricht und in Handwerksbetrieben benutzt, da zumindest bei kreisähnlichen Ellipsen ihre Genauigkeit sehr hoch ist. Für gestreckte Ellipsen sind die in Formelsammlungen angegebenen Näherungsformeln jedoch sehr ungenau. Es werden zwei Formeln angegeben, die für gestreckte Ellipsen genauer sind.

Unfertige Mathematik (3): - mit Flachbandkabeln

PM 46 (2004) 279

R. Oldenburg

Unfertige Mathematik - mit Flachbandkabeln: Festplatten werden in Computern durch vieladrige Flachbandkabel angeschlossen, bei denen einige Leitungen verdreht sind. Wie beschreibt man die Verdrahtung? Was passiert bei der Reihenschaltung solcher Kabel?

Verallgemeinerung des Pythagoras-Satztripels

PM 46 (2004) 281

L. Kienle

Auf die Figur „Dreieck“ bezogene Sätze waren stets Gegenstände mathematischen Schulunterrichts, da an ihnen hervorragend Beweisführungen eingeübt werden können. Ungewöhnlich ist die Behandlung des Satzes von Pythagoras, des Kathetensatzes und des Höhensatzes für das dreidimensionale orthogonale Simplex (Tetraeder). Es können aber dadurch die Sätze für die Ebene in ein spezielles Licht gerückt werden, zum anderen kann das Raumanschauungsvermögen geschult werden. Erst recht kommt dem Gesichtskreis des Lehrers eine Darstellung für den n -dimensionalen euklidischen Raum zugute. Die synthetisch-geometrische Sprechweise in der linearen Algebra beruht auch für $n > 3$ auf einer Raumanschauung, die zwar im Vergleich zu $n \leq 3$ unvollkommen ist, jedoch das heuristische Erfassen und Bearbeiten der Sachverhalte ungemein erleichtert.

Eine merkwürdige Abbildung der Punkte eines Intervalls auf eine seiner Teilmengen

PM 46 (2004) 284

H. Bauer

Über eine »Nonalardarstellung« der reellen Zahlen wird eine Abbildung der Punkte des Einheitsintervalls auf eine seiner Teilmengen definiert. Das geschieht mit Hilfe einer streng monotonen Funktion, die merkwürdige Stetigkeitseigenschaften besitzt: Sie hat in jedem Intervall ihres Definitionsbereichs unendlich viele Stetigkeits- und auch unendlich viele Unstetigkeitsstellen. Der Stetigkeitsbereich hat, als Punktmenge aufgefasst, das Lebesguesche Maß 1, der zugehörige Wertebereich das Maß 0. Die Begriffe »Zahlensystem«, »Funktion«, »Stetigkeit«, »Maß« und auch »Kontinuum« sowie »Cantorsches Diskontinuum« können an Hand der Abbildung vertieft und diskutiert werden. Das Rätsel, dass die reellen Zahlen dicht liegen, obwohl man die jeweils nächstgrößere nicht finden kann, wird erlebbar.

Pythagoras, eine archimedische Spirale und eine Approximation von π **PM 46 (2004) 287**

H. Walser

Eine im Unterricht oft verwendete Konstruktion für die Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen führt auf eine approximativ archimedische Spirale mit der „Dicke“ π .

Kreismuster und Winkelfunktionen **PM 46 (2004) 281**

H.-J. Kayser

Es wird gezeigt, wie man die Untersuchung attraktiver Grafiken mit der Anwendung der Winkelfunktionen \sin und \cos verbinden kann. Dazu werden verschiedene Kreismuster analysiert und entsprechende Anweisungen für das Computeralgebrasystem DERIVE programmiert. Ausgerüstet mit einer Liste von Parameterdarstellungen können die Schüler „spielend“ ihre Kenntnisse über Winkelfunktionen vertiefen und „schöne“ Grafiken erzeugen.

Die hier skizzierte Sequenz ist insbesondere für Differenzierungskurse der Stufe 10 geeignet. - Alle zum Beitrag gehörenden DERIVE-Dateien können vom Aulis-Server heruntergeladen werden.

Dynamische Mathematik mit GeoGebra **PM 46 (2004) 285**

M. Hohenwarter

Dynamische Geometrie und Algebra ergeben GeoGebra, eine mehrfach preisgekrönte Unterrichtssoftware, die Geometrie und Algebra als gleichwertige Partner versteht. Sie und Ihre Schüler können auf einfachste Weise Konstruktionen mit Punkten, Vektoren, Geraden, allen Kegelschnitten sowie Funktionen erstellen und diese dynamisch mit der Maus verändern. Andererseits ist auch deren direkte Eingabe in Schulnotation wie $g: 3x + 4y = 7$ oder $k: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ möglich, und es steht Ihnen eine Vielzahl von Befehlen bis hin zum Differenzieren und Integrieren zur Verfügung. GeoGebra zeichnet die doppelte Sichtweise der Objekte aus: ein Ausdruck im Algebra Fenster entspricht einem Objekt auf dem Zeichenblatt und umgekehrt.

Superhero **PM 46 (2004) 288**

C. Münchenbach

Der Beitrag beschreibt eine Unterrichtsstunde zum Thema Folgen in Klasse 11 eines Technischen Gymnasiums. Als Einstieg wurde eine Spiel auf der Basis von Schere-Stein-Papier gewählt, das verschachtelte Folgen erzeugt. Die praktischen und theoretischen Ergebnisse wurden mit Hilfe des TI-92+ ausgewertet.