

Mathematikabitur im Technologiezeitalter

Angela Köhler

In den vergangenen Jahren hat eine technische Revolution stattgefunden, die die Inhalte des Mathematikunterrichts radikal in Frage stellt und vielen Pädagogen Kopfzerbrechen bereitet. Schon seit der Einführung der ersten Taschenrechner besteht Uneinigkeit unter Lehrern und Eltern. Die einen beklagen, dass Schüler nicht mehr so gut im Kopf rechnen können wie früher, während andere es begrüßen, dass man sich heute interessanteren Fragen widmen kann als der langweiligen Kopfrechnerei. Inzwischen sind jedoch viel weitergehende Hilfsmittel auf dem Markt, und auch traditionelle Lehrinhalte der Mittel- und Oberstufe wie das Lösen von Gleichungen oder das Berechnen von Integralen können heute in Sekundenbruchteilen von Computerprogrammen ausgeführt werden.

Wie also soll man in den Schulen auf diese Herausforderung reagieren? Soll man den Fortschritt ignorieren und weiterhin alles per Hand ausrechnen? Soll man den gesamten Mathematikunterricht im Computerraum abhalten? Die meisten Lehrer sind sich darüber einig, dass beide dieser Extreme unsinnig wären, aber es ist noch unklar, wie der goldene Mittelweg aussieht, der den Schülern solide mathematische Kenntnisse vermittelt und gleichzeitig den Anforderungen des modernen, computergestützten Berufslebens gerecht wird. Zur Zeit ist die Entscheidung noch größtenteils der pädagogischen Freiheit der einzelnen Lehrer überlassen. Manche nutzen den Computerraum ihrer Schule regelmäßig, während andere keinen Fuß hineinsetzen würden. Früher oder später werden jedoch Industrie und Universitäten darauf drängen, dass unsere Schulabsolventen ein gewisses Maß an computertechnischen Fertigkeiten mitbringen und dass solche Themen auch in die Lehrpläne und die Abiturprüfungen Eingang finden. Wie könnte so ein Abitur in der Praxis in ein paar Jahren aussehen?

Ich habe vier Jahre lang Mathematik an einer High School (Klassenstufe 9–12) in den USA unterrichtet und habe hier gerade in der Oberstufe viel Unterrichtserfahrung sammeln können. Die Prüfungen am Ende der Schulzeit sind hier etwas anders organisiert als in Deutschland. Für Schüler, die einen Leistungskurs besucht haben, werden in jedem Jahr die sogenannten Advanced Placement Exams (kurz AP) zentral für die ganzen USA gestellt. Da das Schulsystem der USA flexibler ist, absolvieren die Schüler nicht unbedingt alle dieser Prüfungen am Ende ihrer Schulzeit. Viele belegen in einer Fachrichtung fortgeschrittenere Kurse als in anderen, und so kann ein guter Schüler beispielsweise nach Klasse 10 zu einem AP in Französisch, nach Klasse 11 zu denen in Geschichte und Englisch und nach Klasse 12 in Analysis und Physik antreten. Andere Schüler belegen überhaupt keine AP-Kurse und haben dann nach Klasse 12 zwar einen Schulabschluss, aber kaum Chancen auf Aufnahme in eine gute Universität. Trotz aller Unterschiede sind jedoch die AP-Prüfungen in Niveau und Inhalten gut mit den Abiturprüfungen in Deutschland vergleichbar.

Die amerikanischen Schulen sind den deutschen im Hinblick auf Rechnergebrauch im Mathematikunterricht um ein paar Jahre voraus. Seit 1995 wird von den Schülern in Mathematik erwartet, dass sie einen grafikfähigen, programmierbaren Taschenrechner (wie z. B. TI-83 und ähnliche Modelle) in die

AP-Prüfung mitbringen und sich mit der Benutzung auskennen. Der Einsatz dieser Rechner stellt daher einen integralen Bestandteil jedes Analysiskurses dar.

Natürlich unterrichtet man trotzdem die wesentlichen Bestandteile der Analysis wie z. B. Ableitung, Extremwertbestimmung und Integration anhand von einfachen Beispielen, die sich gut per Hand behandeln lassen. In weiten Teilen verläuft ein typischer Analysiskurs daher gar nicht anders als in Deutschland. Allerdings gehört es im amerikanischen Unterricht zu den Zielen des Kurses, die algebraischen Techniken der Analysis mit ihren Grenzen darzustellen. Die Schüler sollen unter anderem lernen, dass sich in der Analysis nicht alle Fragen geschlossen lösen lassen und dass unlösbare Aufgaben mit numerischen Methoden behandelt werden können. Hierzu zählen unter anderem Extremwertaufgaben, die auf Polynomgleichungen höheren Grades oder unlösbare trigonometrische Gleichungen führen, und die Integration von wichtigen Funktionen wie z. B. $f(x) = e^{-x^2}$.

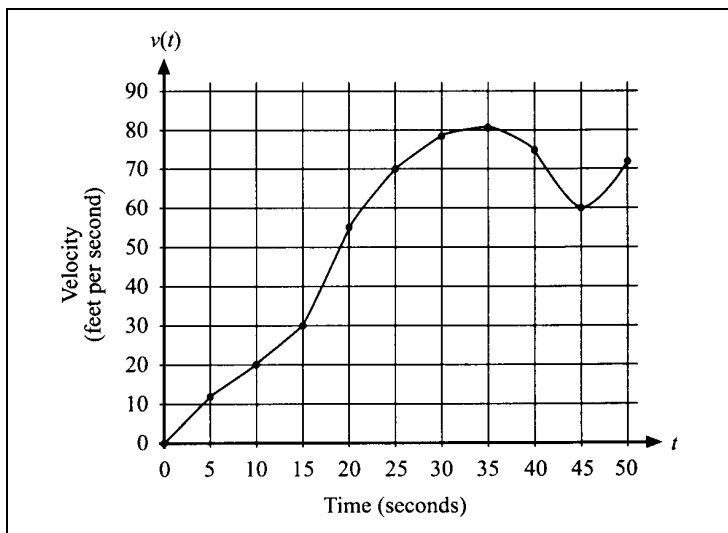
Außerdem sind Differentialgleichungen ein Pflichtthema des AP-Lehrplans, und viele wichtige Differentialgleichungen sind nicht geschlossen lösbar. Man behandelt hier ein paar Beispiele, in denen Trennung der Variablen zu einer geschlossenen Lösung führt. Dann erklärt man den Schülern das *Eulersche* Polygonzugverfahren und schreibt im Unterricht ein Programm für den Taschenrechner, das Differentialgleichungen mit *Eulers* Verfahren numerisch löst. Mit diesem Programm lassen sich dann interessante Fragen aus der Physik und anderen außermathematischen Gebieten behandeln. So kann man beispielsweise die (nicht explizit lösbare) Differentialgleichung des Fadenpendels untersuchen und feststellen, dass sich die Lösung für kleine Startgeschwindigkeiten wie eine Sinuskurve verhält, dass das Pendel sich aber bei großen Startgeschwindigkeiten überschlägt und sich immer in der gleichen Richtung weiterdreht. Für Schüler ist es spannend, ihr mathematisches Wissen auf diese Weise an der Wirklichkeit überprüfen zu können.

Wie soll nun aber ein Mathematikabitur aussehen, das prüft, ob die Schüler trotz des ständig verwendeten Taschenrechners solide mathematische Kenntnisse erworben haben? Im Großen und Ganzen sieht die Prüfung aus wie in Deutschland; Schüler bestimmen Tangenten an Kurven, minimieren Flächeninhalte und berechnen die Volumen von Rotationskörpern. Wo es möglich ist, dürfen Schüler dabei ihre Taschenrechner verwenden, um Gleichungen zu lösen und bestimmte Integrale zu berechnen. Aufgaben mit Kurvenscharen und Parametern sorgen dafür, dass auch die algebraischen Techniken des Ableitens und Integrierens geprüft werden. Darüber hinaus gibt es jedoch immer wieder Aufgaben, die die allzu rechnerverwöhnten Schüler gezielt auf die Probe stellen und ein tieferes Verständnis der Analysis verlangen. Im Folgenden werden einige der Aufgaben aus den AP-Prüfungen der letzten Jahre vorgestellt, die dieses Zusammenspiel von theoretischem mathematischem Wissen und Rechnergebrauch illustrieren sollen.

1 Haben die Schüler die grundlegenden Konzepte der Analysis wie die Ableitung, das Integral und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verstanden?

Diese Themen lassen sich gut mit Hilfe von Aufgaben prüfen, in denen Information über eine Funktion graphisch oder numerisch gegeben ist. Die Schüler können hier nichts einfach in den Taschenrechner eintippen, denn eine algebraische Beschreibung der Funktion steht nicht zur Verfügung.

Eine Aufgabe zu Ableitung und Integral



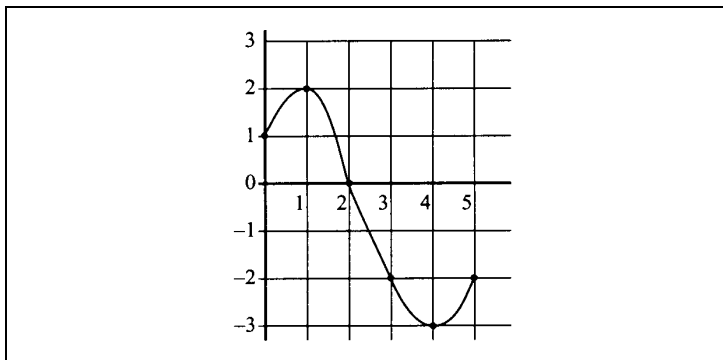
t (seconds)	$v(t)$ (feet per second)
0	0
5	12
10	20
15	30
20	55
25	70
30	78
35	81
40	75
45	60
50	72

Das obige Diagramm zeigt die Geschwindigkeit $v(t)$ (in Fuß pro Sekunde) eines Autos, das auf einer geradlinigen Straße fährt. Die Tabelle zeigt Werte für $v(t)$ in 5-Sekunden-Abständen.

- Während welcher Zeiträume ist die Beschleunigung des Autos positiv? Begründe.
- Bestimme die durchschnittliche Beschleunigung des Autos, in Fuß pro Sekunde², während des Zeitintervalls $0 = t = 50$.

- Finde einen Näherungswert für die Beschleunigung des Autos zum Zeitpunkt $t = 40$.
- Bestimme einen Näherungswert für $\int_0^{50} v(t) dt$ mit Hilfe einer Riemannsumme. Verwende dazu die Mittelpunkte von fünf gleich langen Teilintervallen.

Eine Aufgabe zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Sei f eine Funktion, deren Definitionsbereich das geschlossene Intervall $[0, 5]$ ist. Der Graph von f ist im obigen Diagramm gezeigt. Sei

$$h(x) = \int_0^{x+3} f(t) dt.$$

- Bestimme den Definitionsbereich der Funktion h .
- Bestimme $h'(2)$.
- An welcher Stelle x hat $h(x)$ ein Minimum? Begründe deine Antwort.

Diese Aufgabe wäre auch für deutsche Schüler interessant und schwierig. Wer Integration einfach nur als "Aufleitung" begreift, wird mit dieser Aufgabe Probleme haben. Ein volles Verständnis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist hier nötig.

Eine andere interessante Art von Aufgaben verlangt von den Schülern, die Definition der Ableitung zu verwenden, um eine unbekannte Funktion zu bestimmen.

Sei f eine in ihrem Definitionsbereich differenzierbare Funktion mit den folgenden Eigenschaften.

- (I) Für alle reellen Zahlen x, y und $x + y$ im Definitionsbereich von f gilt

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$$

- (II) $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 0$

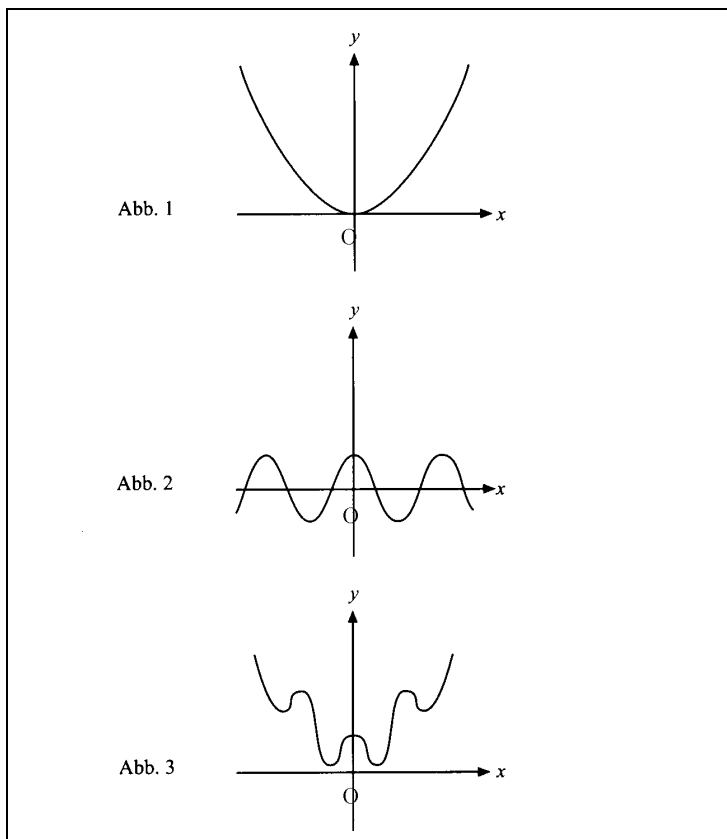
- (III) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1$

- Zeige, dass $f(0) = 0$.
- Verwende die Definition der Ableitung um zu zeigen, dass $f'(x) = 1 + (f(x))^2$. Mache deutlich, wo die obigen Eigenschaften (I), (II) und (III) verwendet wurden.
- Finde $f(x)$ durch Lösen der Differentialgleichung aus b).

PM BEITRAG

Auch hier werden Schüler nicht erfolgreich sein, wenn sie Ableitungen nur nach Kochrezept (oder mit dem Rechner) bestimmen können. Es ist für viele Schüler erstaunlich schwierig, die Beziehung zwischen Eigenschaft (I) und der Definition der Ableitung zu sehen. Man muss nur den Buchstaben y durch h ersetzen und den Ausdruck aus Eigenschaft (I) für $f(x + h)$ in die Definition der Ableitung einsetzen.

2 Können die Schüler die klassischen Methoden der Analysis anwenden und mit den Taschenrechnergraphen in Einklang bringen?



Sei $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$ und $h(x) = x^2 + \cos x$. Auf Grund der oben in Abbildung 1 und 2 gezeigten Graphen von f und g könnte man darauf schließen, dass der Graph von h so aussehen sollte wie in Abbildung 3.

- Zeichne den tatsächlichen Graphen von h in dem unten vorgegebenen Koordinatensystem ein.
- Verwende h'' um zu erklären, warum der Graph von h nicht wie derjenige in Abbildung 3 aussieht.
- Beweise, dass der Graph von $f(x) = x^2 + \cos(kx)$ je nach dem Wert der Konstanten k entweder unendlich viele oder gar keine Wendepunkte besitzt.

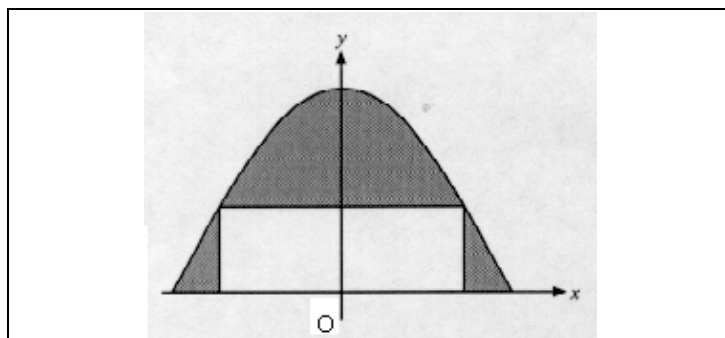
Diese Aufgabe testet, ob die Schüler ihr theoretisches Wissen und die vom Rechner erzeugten Graphen zu einer tieferen Einsicht verbinden können. Schüler, die einfach unkritisch alles hinnehmen, was ihnen der Rechner ausspuckt, werden von solch einer Frage gezielt herausgefordert. Da die Aufgabe nach einem Parameter k fragt, führen hier nur die algebraischen Methoden der Analysis zum Ziel. Der Zugang zu Funktionsgraphen ist ganz

anders als in den deutschen Abituraufgaben; der Graph ist nicht das handgezeichnete Endergebnis einer algebraischen Kurvendiskussion, sondern er wird vom Rechner erzeugt und dient als Ausgangspunkt, von dem aus weitergehende Fragen untersucht werden.

3 Können die Schüler sinnvoll entscheiden, wann der Taschenrechner nötig ist und wann man besser mit algebraischen Methoden arbeitet?

Im Allgemeinen ist es für Schüler vorteilhafter, Ableitungen und Integrale algebraisch zu berechnen, denn sie riskieren Punktabzug, wenn ihre Endergebnisse nicht auf drei Dezimalen genau stimmen. Zwischenergebnisse wie $\frac{\pi}{2}$ oder $\sqrt{3}$ sind daher sicherer als die vom Taschenrechner erhältlichen Näherungswerte. Außerdem kann es mühsam und langwierig sein, überhaupt das richtige „Fenster“ zu finden, in dem man eine gegebene Funktion auf dem Rechner zeichnen und analysieren will, so dass die algebraische Untersuchung per Hand sogar Zeit sparen kann. Andererseits müssen die Schüler erkennen, wann diese Methoden an ihre Grenzen stoßen, wie in der folgenden Aufgabe.

Ein Rechteck liegt wie im untenstehenden Diagramm gezeigt mit einer Seite auf der x -Achse und hat seine beiden oberen Ecken auf dem Graphen der Funktion $y = \cos x$ mit $-\frac{\pi}{2} = x = \frac{\pi}{2}$. Was ist der kleinstmögliche Flächeninhalt der schraffierten Fläche?



Dies scheint auf den ersten Blick eine klassische Analysisaufgabe zu sein, wie sie auch in Deutschland gestellt werden könnte, aber sie ist ohne den Taschenrechner nicht lösbar. Die Schüler sollen eine Funktion $A(b) = 2 - 2b \cos b$ für die schraffierte Fläche aufstellen, sollen die Ableitung $A'(b) = 2b \sin b - 2 \cos b$ ermitteln und erkennen, dass sich die entstehende Gleichung $A'(b) = 0$ nicht geschlossen lösen lässt. Auf dem Taschenrechner sollen sie dann die Nullstellen von A' numerisch bestimmen und damit die minimale Fläche ermitteln. Die zweite Ableitung lässt sich wieder per Hand untersuchen, denn $A'' = 4 \sin b + 2b \cos b$ ist für $0 = b = \frac{\pi}{2}$ immer positiv.

4 Verstehen die Schüler die numerischen Prozeduren im Taschenrechner?

Der AP-Lehrplan verlangt ausdrücklich, dass die Schüler für jede numerische Prozedur der Analysis das grundlegende Prinzip kennen und verstehen und nur die zeitraubende Ausführung dem Rechner überlassen. Zu diesen Prozeduren

PM BEITRAG

gehören sowohl die Trapezregel, Mittelpunktsregel und Fassregel für die Integration als auch das *Eulersche* Polygonzugverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen.

Eine Aufgabe zur Integration

Sei

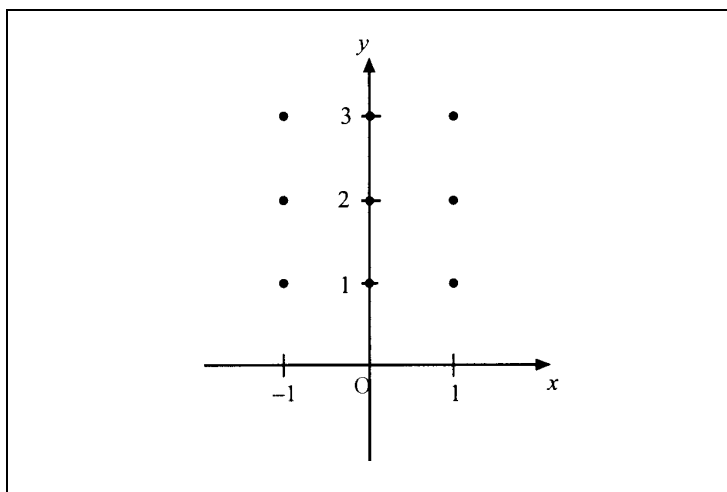
$$F(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt \quad \text{für } 0 \leq x \leq 3.$$

- Verwende die Trapezregel mit vier Teilintervallen auf dem geschlossenen Intervall $[0, 3]$, um $F(1)$ anzunähern.
- Auf welchen Intervallen ist F monoton wachsend?

Eine Aufgabe zum Polygonzugverfahren

Gegeben ist die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{2}$.

- Skizziere im untenstehenden Diagramm ein Richtungsfeld für diese Differentialgleichung an den neun vorgegebenen Punkten.



- Sei $y = f(x)$ die spezielle Lösung der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $f(0) = 3$. Verwende das *Eulersche* Polygonzugverfahren mit Schrittweite 0,1 um einen Näherungswert für $f(0,2)$ zu ermitteln.
- Finde die spezielle Lösung $y = f(x)$ der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $f(0) = 3$. Benütze deine Lösung, um $f(0,2)$ zu berechnen.

Durch solche Fragen wird verhindert, dass die Schüler den Taschenrechner einfach als gottgegebene Black Box unkritisch verwenden – ein Verständnis dessen, was im Rechner passiert, ist Teil des AP-Wissens. Die zweite dieser Aufgaben wäre als praktische Anwendungen des *Eulerschen* Verfahrens unsinnig, denn die Differentialgleichung lässt sich ja durch Trennung der Variablen lösen. Die Schüler zeigen hier jedoch, dass sie die Programme verstanden haben, mit denen ihr Rechner Aufgaben numerisch löst.

5 Zusammenfassung

Die oben beschriebenen Aufgaben zeigen, dass Schüler durchaus nicht weniger lernen, wenn sie im Unterricht Zugang zu einem modernen Rechner haben. Allerdings findet eine

Verschiebung der Schwerpunkte statt. Man löst in der Oberstufe weniger Gleichungen per Hand und verwendet keine Zeit mehr auf den Umgang mit Brüchen und Arithmetik. Stattdessen erwerben die Schüler Grundkenntnisse in Numerik und Programmierung. Ich glaube, dass die Schulen hier eine einmalige Chance haben. Die meisten unserer Schulabsolventen werden später in irgendeiner Form mit Rechnern zu tun haben. Sie sollten schon in der Schule erfahren, dass hinter den eindrucksvollen Fähigkeiten eines Rechnerprogramms oft eine einfache, mathematisch verständliche Prozedur steckt, die uns Menschen schlichtweg die mühselige Arbeit abnimmt. Guter, rechnergestützter Mathematikunterricht kann Schülern das Gefühl vermitteln, dass sie sich elektronische Hilfsmittel zu Nutze machen können, um schwierige Probleme selbständig zu lösen. Solche Erfahrungen sind von unschätzbarem Wert für Studium und Beruf.

6 Anhang: Computer und Softwarepakete im Unterricht

Die obigen Aufgaben zeigen, dass der AP-Lehrplan in Analysis bisher auf ein volles Verständnis der verwendeten Rechnerprogramme abzielt und die Benutzung von Rechnern als "Black Box" zu verhindern sucht. Zum Einsatz von Computeralgebrasystemen verhält sich der AP-Lehrplan daher bisher sehr zurückhaltend. Allermodernste Taschenrechner, auf denen Computeralgebrasysteme wie DERIVE implementiert sind, werden in der AP-Prüfung derzeit nicht zugelassen. In der Praxis an Schulen hat sich die Verwendung solcher Programme offenbar als teure, zeit-aufwendige Spielerei erwiesen, die den Lehrzielen des Kurses nur wenig förderlich ist. Die Grenzen, an die man in der Analysis stößt, liegen nämlich gar nicht so sehr in der Rechengeschwindigkeit oder den großen Datenmengen als viel mehr in der prinzipiellen Unlösbarkeit vieler Fragestellungen, und hier kann auch ein Computeralgebrasystem nicht weiterhelfen. Sobald man sich aber mit numerischen Näherungen zufriedengeben muss, ist der grafikfähige Taschenrechner oft genau so nützlich und für den Schulunterricht wegen seiner einfachen Benutzung und seines geringeren Preises vorzuziehen. Es ist daher nicht zu erwarten, dass in absehbarer Zeit der Umgang mit Computeralgebrasystemen vom AP-Lehrplan verlangt wird.

Allerdings gibt es neben dem AP-Examen in Analysis auch eines in Statistik, und hier ist der Zugang zu elektronischen Hilfsmitteln ganz anders. In Statistik ist die Frage nach der geeigneten Technologie komplizierter als in Analysis, denn Universitäten und Firmen erwarten hier von den Schulen, dass sie ihre Schüler auf die in der statistischen Praxis üblichen Methoden und Programme vorbereiten. Statistik ist für viele Menschen nützlich, die in Wirtschaft, Soziologie oder Politik, Medizin oder Biologie große Mengen von Daten analysieren müssen. Daher sollen Schüler schon im Unterricht erfahren, wie außerhalb der Schule mit echten Daten umgegangen wird, und hier ist es vom Lehrplan verlangt, dass realistische Datensätze mit Hilfe von sowohl grafikfähigen Taschenrechnern als auch statistischen Softwarepaketen im Unterricht besprochen werden.

In der folgenden AP-Aufgabe müssen die Schüler einen Ausdruck eines solchen Softwarepaketes interpretieren. Sie sollen demonstrieren, dass sie mit Regressionsgeraden und

PM BEITRAG

Korrelation vertraut sind, aber auch, dass sie sich durch den Datenwirrwarr statistischer Softwarepakete hindurchmanövrieren und die relevante Information herausuchen und kritisch interpretieren können.

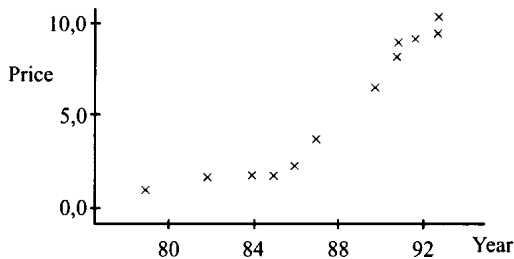
Du planst, dein Auto (Baujahr 1988) zu verkaufen, und willst herausfinden, welchen Preis du dafür vernünftigerweise verlangen kannst, um mit anderen Autos desselben Modells auf dem Markt konkurrieren zu können. Aus Zeitungsanzeigen gewinnst du die folgenden Daten für zwölf verschiedene Autos dieses Modells. Du willst mit Hilfe von Regression mit der Methode der kleinsten Abstandsquadrate eine Funktion finden, mit der sich ein Preis für dein Auto ermitteln lässt.

Production Year	1990	1991	1992	1987	1993	1991
Asking Price (in thousands of dollars)	6,0	7,7	8,8	3,4	9,8	8,4

Production Year	1993	1985	1984	1982	1986	1979
Asking Price (in thousands of dollars)	8,9	1,5	1,6	1,4	2,0	1,0

Unten gezeigt sind die Computerausdrucke für drei verschiedene lineare Regressionsansätze. In Ansatz 1 ist der Preis eine Funktion des Baujahrs, in Ansatz 2 ist der Logarithmus des Preises eine Funktion des Baujahrs, und in Ansatz 3 ist die Quadratwurzel des Preises eine Funktion des Baujahrs. Jeder Ausdruck enthält zusätzlich einen Graphen der Residuen der Daten im Vergleich zu den Werten der Regressionsgerade.

Ansatz 1

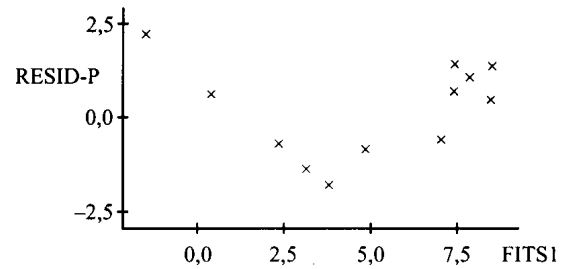


The regression equation is

$$\text{Price} = -58,1 + 0,719 \text{ Year.}$$

Predictor	Coef	Stdev	t-ratio	p
Constant	-58,050	7,205	-8,06	0,000
Year	0,71900	0,08200	8,77	0,000

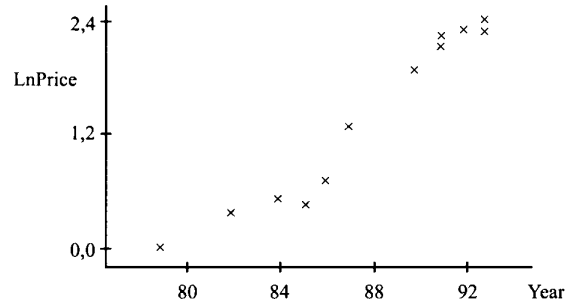
$$s = 1,255 \quad R\text{-sq} = 88,5 \%$$



Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS	F	p
Regression	1	121,10	121,10	76,88	0,000
Error	10	15,75	1,58		
Total	11	136,85			

Ansatz 2

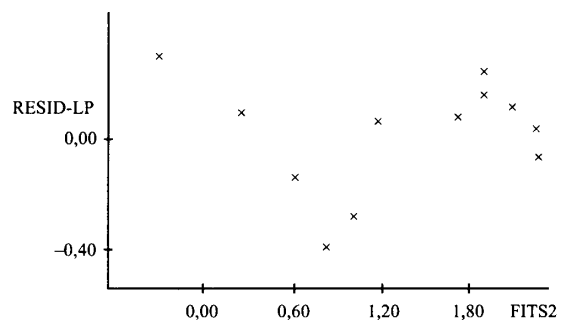


The regression equation is

$$\text{LnPrice} = -14,9 + 0,185 \text{ Year.}$$

Predictor	Coef	Stdev	t-ratio	p
Constant	-14,924	1,223	-12,21	0,000
Year	0,18502	0,01392	13,30	0,000

$$s = 0,2130 \quad R\text{-sq} = 94,6 \%$$

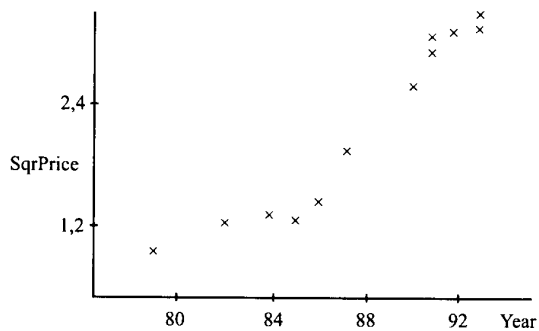


Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS	F	p
Regression	1	8,0190	8,0190	176,77	0,000
Error	10	0,4536	0,0454		
Total	11	8,4726			

Ansatz 3

PM BEITRAG

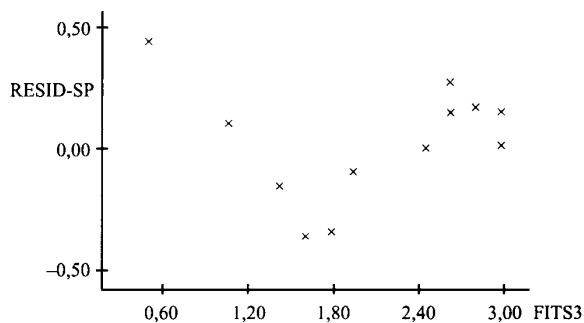


The Regression equation is

$$\text{SqrPrice} = -13,3 + 0,176 \text{ Year}$$

Predictor	Coef	Stdev	t-ratio	p
Constant	-13,313	1,447	-9,20	0,000
Year	0,17559	0,01647	10,66	0,000

s = 0,2520 R-sq = 91,9 %



Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS	F	p
Regression	1	7,2221	7,2221	113,72	0,000
Error	10	0,6351	0,0635		
Total	11	7,8572			

- Verwende Ansatz 1, um einen Preis für dein Auto (Baujahr 1988) zu ermitteln.
- Verwende Ansatz 2, um einen Preis für dein Auto (Baujahr 1988) zu ermitteln.
- Verwende Ansatz 3, um einen Preis für dein Auto (Baujahr 1988) zu ermitteln.
- Beschreibe die Nachteile dieser drei Ansätze.
- Verwende alle oder einen Teil der Daten, um einen bessere Methode zu Bestimmung des Preises zu finden. Erkläre, warum deine Methode besser ist.

Anschrift der Verfasserin

Dr. Angela Köhler, Draisstr. 25, 69502 Hemsbach
 E-Mail: 100573.2457@compuserve.com
